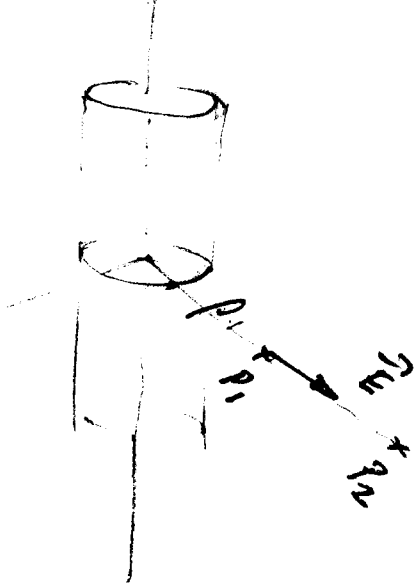




Como visto anteriormente,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\rho}$$

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$V(P_2) - V(P_1) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$V(P_2) - V(P_1) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

$\rho_2 \rightarrow \infty \quad \Delta V \rightarrow \infty$; Escolhemos o zero de potencial

em $\rho = a \quad V(a) = 0$

$$V(\rho) = - \int_0^{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$V(\rho) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

No caso de um cilindro condutor de raio a , o excesso de carga estará todo distribuído na superfície cilíndrica. O campo elétrico no interior do cilindro tem que ser nulo no equilíbrio eletrostático.

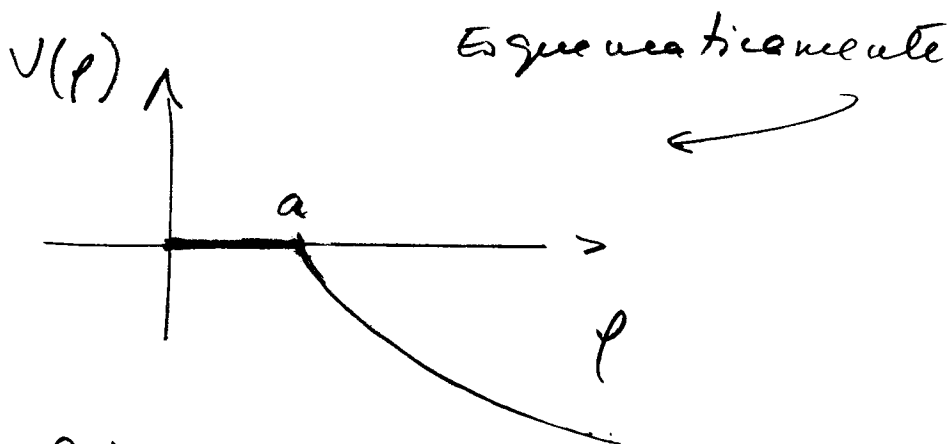
Neste caso, com uma escolha de origem temos

Cilindro condutor de raio a carregado.

12

$$Q = \lambda L = \frac{\sigma S}{2\pi a L} \Rightarrow \lambda = \sigma 2\pi a$$

$$V(\rho) = - \frac{\sigma 2\pi a}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) = - \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

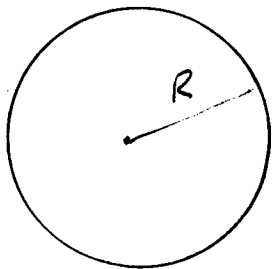


$$\vec{E}(\rho) = - \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho}$$

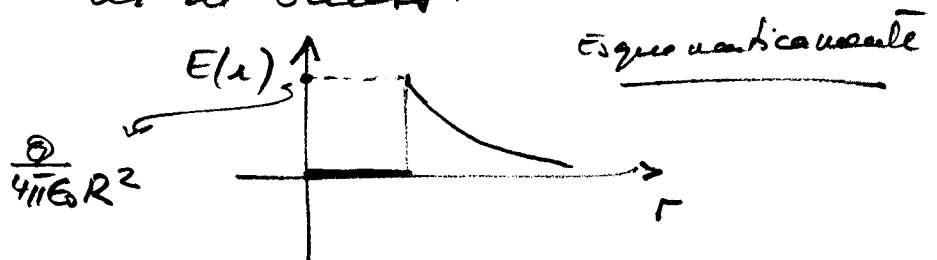
$$\vec{E}(\rho) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \rho} \hat{\rho}$$

Superfície esférica uniformemente carregada

$$Q = \sigma A = \sigma 4\pi R^2$$



Campo elétrico em todo o espaço pode ser obtido pela lei de Gauss.



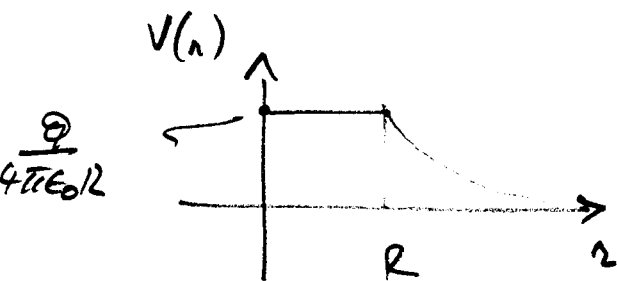
$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

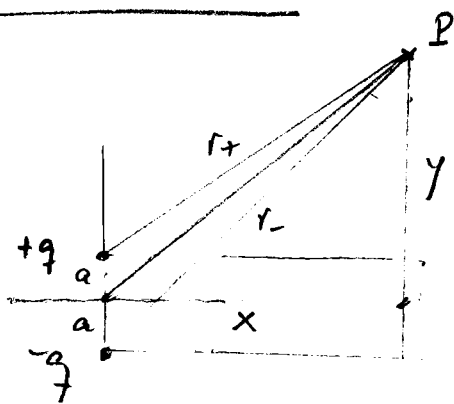
Escolhendo a origem de potencial em $R \rightarrow \infty$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r E(r') dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad r \geq R$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad r \leq R$$



Dipolo elétrico



$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\}$$

$$r_+ = (x^2 + (y-a)^2)^{1/2}$$

$$r_- = (x^2 + (y+a)^2)^{1/2}$$

Para $r \gg a$ $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$

$$\frac{1}{r_{\pm}} = [x^2 + (y \mp a)^2]^{-1/2} = [x^2 + y^2 \mp 2ay + a^2]^{-1/2}$$

$$= [r^2 \mp 2ay + a^2]^{-1/2} = r^{-1} \left[1 \mp \frac{2ay}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} \right]^{-1/2}$$

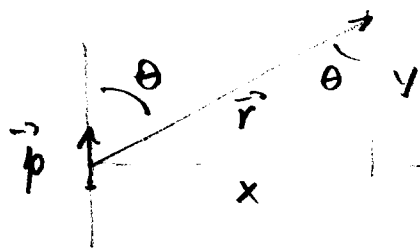
$$\approx \frac{1}{r} \left[1 \pm \frac{ay}{r^2} \right] \Rightarrow$$

$$\left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\} \approx \frac{2ay}{r^3} \Rightarrow V(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ay}{r^3}$$

$$p = 2aq \Rightarrow \left| V(\vec{r}) = \frac{py}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right|$$

Pode-se escrever

$$y = r \cos \theta \Rightarrow$$



$$V(\vec{r}) \propto \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Para 1) de $V(\vec{r})$ cai com $1/r^2$. Note que para um campo pontual $V(\vec{r})$ cai com $1/r$.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

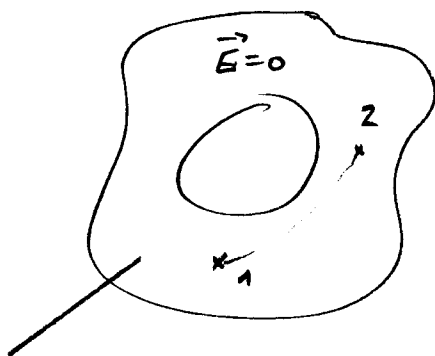
$$\vec{p} = p \hat{y}$$

$$V \propto \frac{p y}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Mostre que: $\vec{E} \propto \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\vec{p} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} \vec{r} \right]$

— " —

Potencial em condutores



O campo elétrico no interior do condutor em equilíbrio eletrostático deve ser nulo

$$V(P_2) - V(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$V(P_2) = V(P_1)$$

Condutor em equilíbrio eletrostático

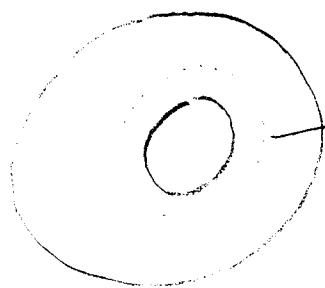
Todos os pts no interior tem o mesmo potencial.

Em particular a superfície do condutor é uma superfície equipotencial. Não pode haver componente de $\vec{E}$ tangente à superfície

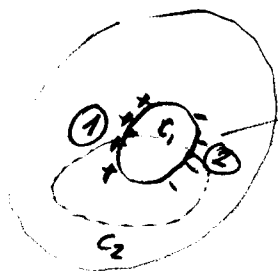

condutor
em equilíbrio
eletrostático

$\vec{E}_{||}$ à superfície deve ser nula
 $\vec{E}$ deve ser $\perp$ à superfície
próxima a ela.

Se o condutor estiver carregado, e não houver campo no interior da cavidade $\Rightarrow$ a carga deve estar distribuída na superfície externa do condutor



carga total envolvida
por qq superfície Gaussiana
envolvendo a cavidade e
então no condutor deve ser nula.



Esta distribuição satisfaz isso,
mas é inaceitável pq se saísse
do pto 1 e volta ao ponto 1 $\Delta V = 0$

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{(2)}^{(1)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

ao longo de C_1

ao longo de C_2

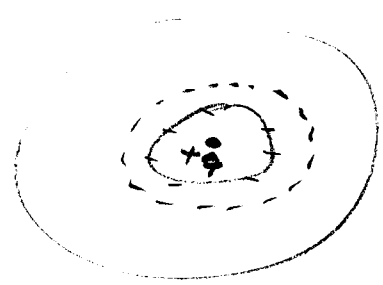
Como $\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ pois C_2 está dentro do condutor

Temos $\int_{\textcircled{1}}^{\textcircled{2}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$
ao longo de γ

Porém se as linhas de campo iniciarem em $\textcircled{1}$ e terminam em $\textcircled{2}$, como ilustra a fig. isto deveria dar $\neq 0$!

Ou seja, isto não pode acontecer no equilíbrio eletrostático.

A situação muda de figura se houver uma carga na cavidade. Nesse caso, ele será blindado de modo que o campo no interior do condutor seja nulo no equilíbrio.

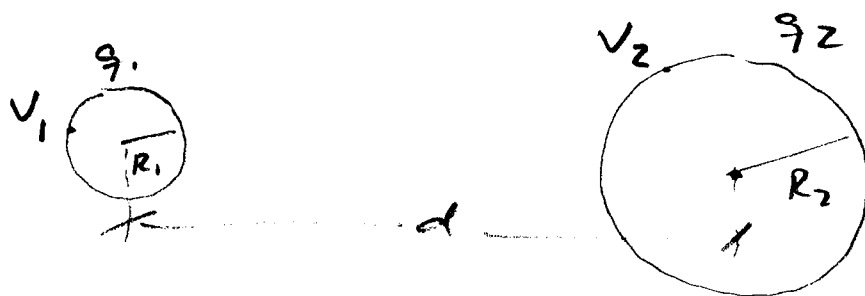


A carga induzida na superfície interna $(-q)$. Se o condutor estiver neutro aparecerá uma carga $(+q)$ na sua superfície externa. Note que, nesse caso, o campo fora não será nulo.

Contato entre dois condutores: efeito das pontas

condutores

Considere duas esferas de raios R_1 e R_2 , com cargas q_1 e q_2 , respectivamente, separadas por uma distância $d \gg R_1$ e R_2 .



Os potenciais nas superfícies das esferas são dados, respectivamente por

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{d} \right)$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2}{R_2} + \frac{q_1}{d} \right)$$

Se $d \gg R_1$ e $R_2 \Rightarrow$

$$V_1 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1}$$

$$V_2 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}$$

como se elas tivessem isoladas.

Se as esferas forem conectadas por um fio condutor, irá fluir carga de um condutor para outro através do fio.

Se $\Delta V \neq 0 \Rightarrow$ existe campo elétrico

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Vamos supor que esse fio seja muito fino, de tal modo que ele apenas funcione como um meio para possibilitar a redistribuição de cargas entre as esferas. (18)

A carga total inicial $Q = q_1 + q_2$ é conservada. Assim, chamando q'_1 e q'_2 as cargas finais (depois da redistribuição) nas esferas ① e ②, respectivamente, temos:

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$$

A redistribuição ocorre quando os potenciais finais

$$\frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{q'_1}{q'_2} = \frac{R_1}{R_2}}$$

$$Q = q'_1 + q'_2 = q'_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \quad q'_2 = \frac{R_2}{R_1} q'_1$$

$$\boxed{q'_1 = \frac{Q R_1}{R_1 + R_2}} \quad \boxed{q'_2 = \frac{Q R_2}{R_1 + R_2}}$$

As densidades superficiais de carga

$$\sigma'_1 = \frac{q'_1}{4\pi R_1^2} = \frac{Q}{4\pi R_1 (R_1 + R_2)} \quad \sigma'_2 = \frac{Q}{4\pi R_2 (R_1 + R_2)}$$

Ou seja,

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'} = \frac{R_2}{R_1}$$

19

A densidade de carga será maior na esfera de raio menor. Ela é inversamente proporcional ao raio de curvatura



↑
densidade de carga
na ponta é maior.

O campo elétrico próximo a um condutor é dado por $\vec{E} = \sigma / \epsilon_0 \hat{n}$ ($\hat{n}$ é superfície do condutor)

Quanto maior σ maior o campo naquele ponto.

Os para-raios usam essa propriedade.

Funcionamento dos geradores van de Graaff.

Infinitesimalmente, para força conservativa,

$$dU = - \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$



$$F d\ell \cos \theta$$

$F \cos \theta \equiv$ componente de F ao longo de $d\vec{\ell}$.
 $\underbrace{F \cos \theta}_{F_\ell}$

$$dU = - F_\ell d\ell$$

$$F_\ell = - \frac{dU}{d\ell}$$

Isso é uma derivada "direcional"

A derivada de U na direção $d\vec{\ell}$ nos dá $-F_\ell$:

(-) componente de $\vec{F}$ na direção $d\vec{\ell}$.

O nome desse "derivada direcional" é "gradiente".

Em coordenadas Cartesianas

$$dU = - \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z} \\ d\vec{\ell} &= dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} \end{aligned} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$U = U(x, y, z) \Rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

$$dU = - \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = - \{ F_x dx + F_y dy + F_z dz \}$$

Isso vale para todo deslocamento arbitrário $\vec{dr}$. (5.2)

Nesse caso, $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

O gradiente de uma função escalar U em coordenadas Cartesianas é definido

por
$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$$

Analogamente, $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$

$$\vec{F} = q \vec{E} ; \quad \Delta U = q \Delta V$$

Então simbolizo $\frac{\partial U}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x}$

variação infinitesimal ao longo da direção $\hat{x}$ apenas.

Analogamente

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{U(x, y+\Delta y, z) - U(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(x, y, t+\Delta t) - U(x, y, t)}{\Delta t}$$

As derivadas parciais em relação a x, y e t , respectivamente.

