



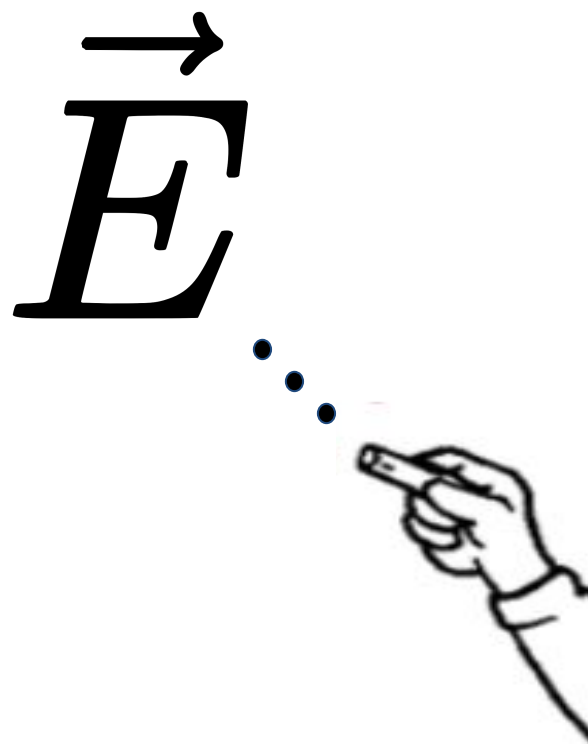
Capítulo 28 - A Lei de Gauss

Professor: Prof. Carlos Eduardo Souza - Cadu

**Sala: A2-15 (IF, andar 1P)
Email: carloseduardosouza@id.uff.br**

A Lei de Gauss

A Lei de Gauss é uma outra abordagem para cálculo de campo elétrico...



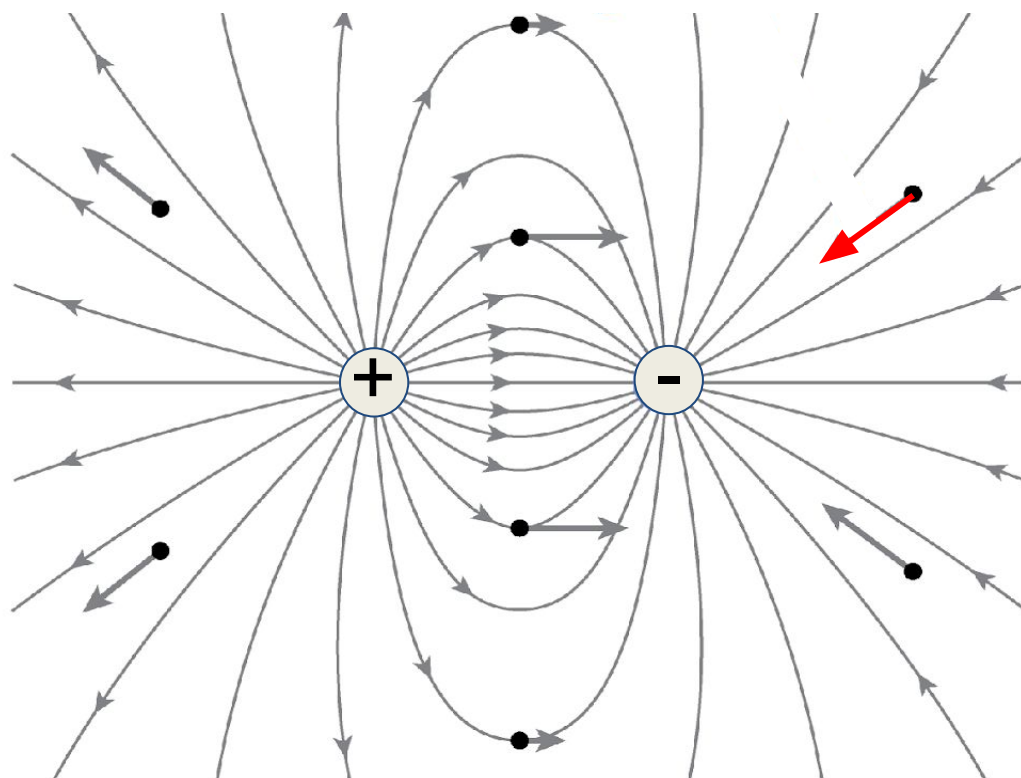
A Lei de Gauss

Objetivos destas próximas duas aulas:

- 1- Usar simetrias do sistema para determinar o campo elétrico \mathbf{E}
- 2- Calcular o fluxo de \mathbf{E} através de uma superfície
- 3- Calcular (**com facilidade**) o \mathbf{E} em distribuições de carga simétricas
- 4- Usar a Lei de Gauss para explicar propriedades de metais em equilíbrio.

A Lei de Gauss

Estudando a simetria...

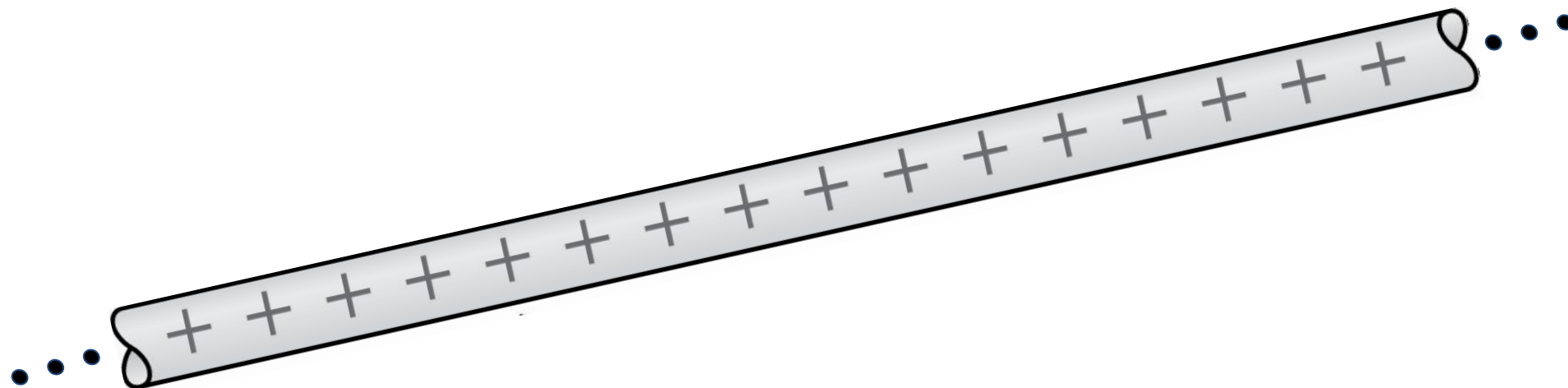


Digamos que APENAS soubéssemos que:

- Todo E aponta para fora de cargas positivas, e em direção às cargas negativas
- E exerce uma força elétrica sobre qq carga elétrica.

A Lei de Gauss

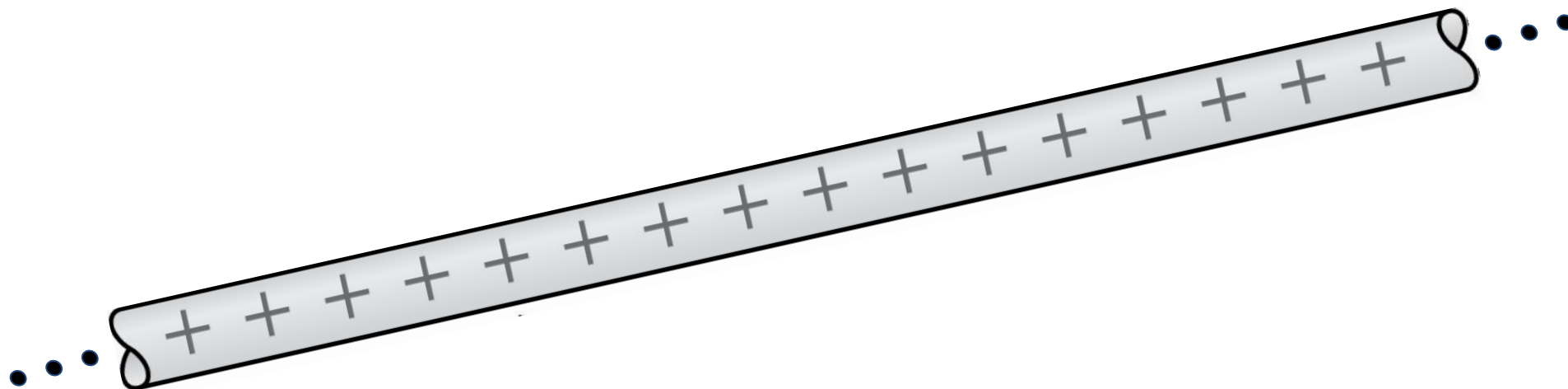
Considere um cilindro infinitamente longo e carregado com carga positiva.



O que podemos deduzir acerca do campo elétrico?

A Lei de Gauss

Considere um cilindro infinitamente longo e carregado com carga positiva.



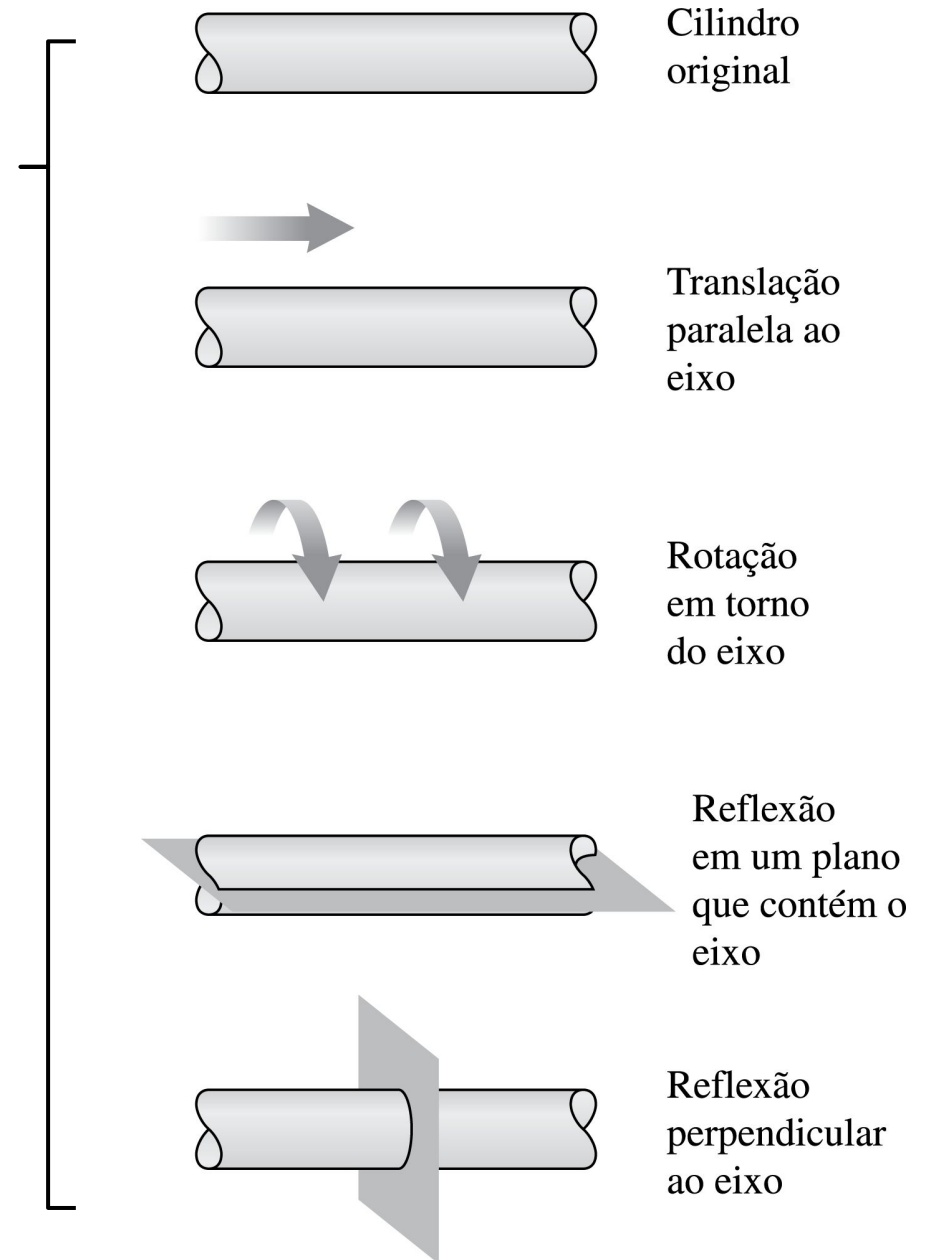
O que podemos deduzir acerca do campo elétrico?

Lembrando que tudo que sabemos é:

- Todo campo elétrico aponta para fora de cargas positivas, e em direção às cargas negativas.
- O campo elétrico exerce uma força elétrica sobre qq carga elétrica.

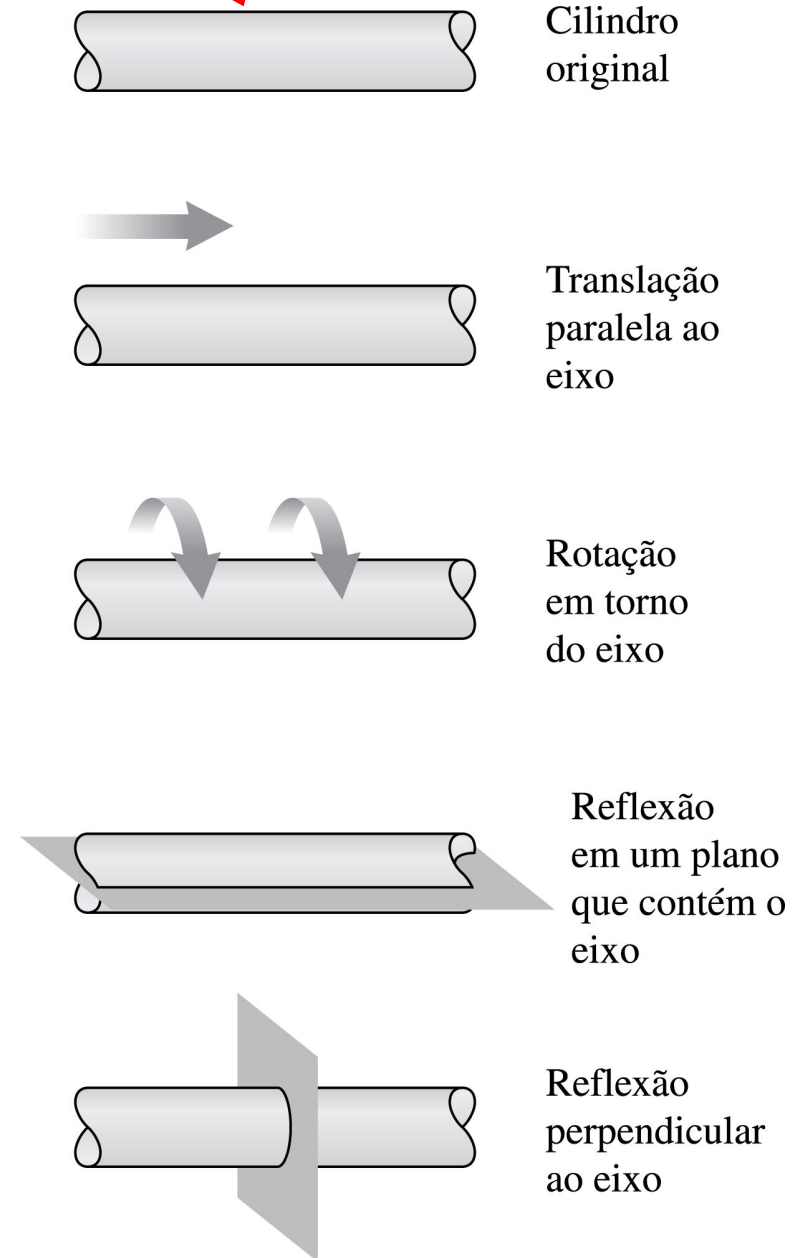
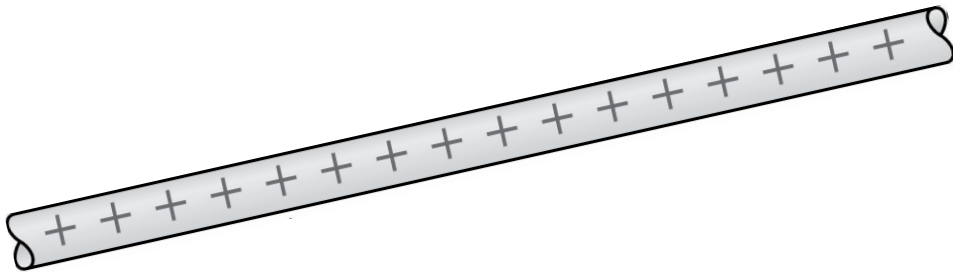
A Lei de Gauss

Uma distribuição de cargas é simétrica se existir um grupo de transformações geométricas que não cause nenhuma alteração física...



Uma distribuição de cargas é simétrica se existir um **grupo de transformações geométricas** que não cause nenhuma alteração física...

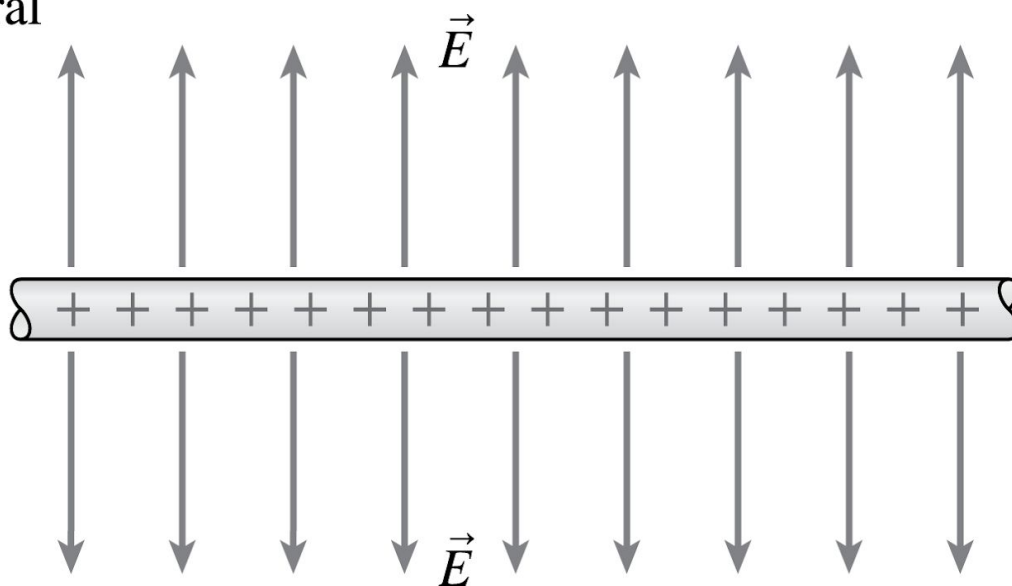
No caso geral, se a alteração (translação, p. ex.) não permitir concluir que nada mudou, então dizemos que a distribuição de cargas é simétrica frente àquela transformação particular.



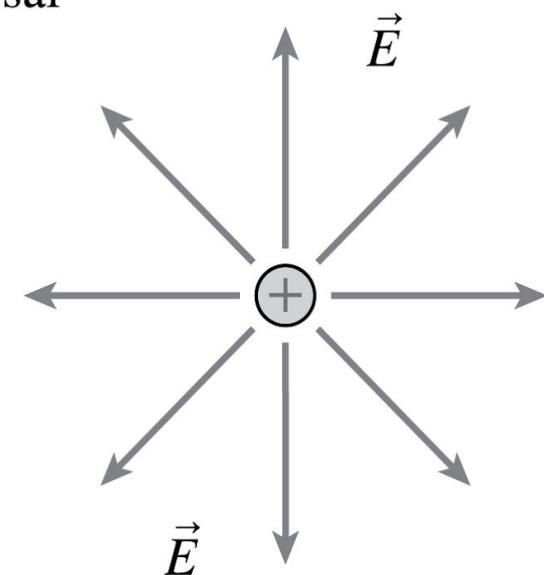
A Lei de Gauss

Os argumentos de simetria nos permitem concluir que o campo elétrico de um fio infinito tem simetria axial (cilíndrica)...

Vista lateral



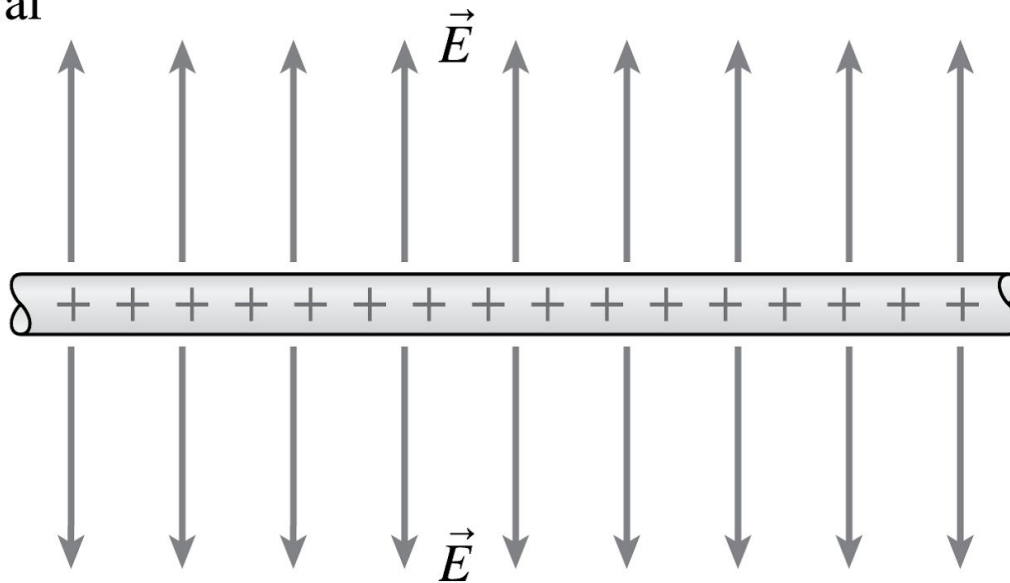
Vista transversal



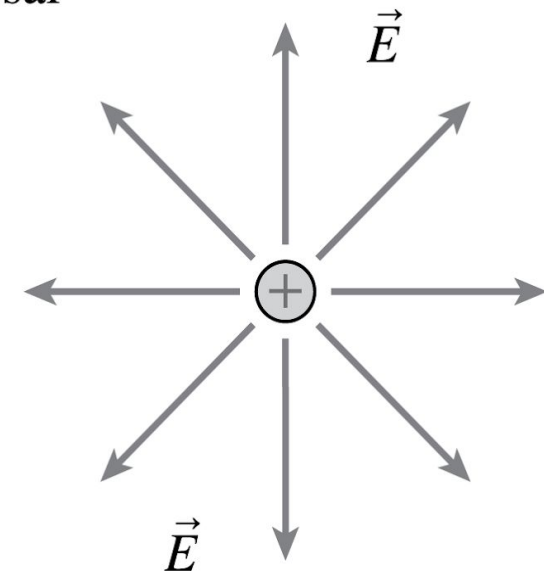
A Lei de Gauss

Os argumentos de simetria nos permitem concluir que o campo \vec{E} de um fio infinito tem simetria axial (cilíndrica)...

Vista lateral



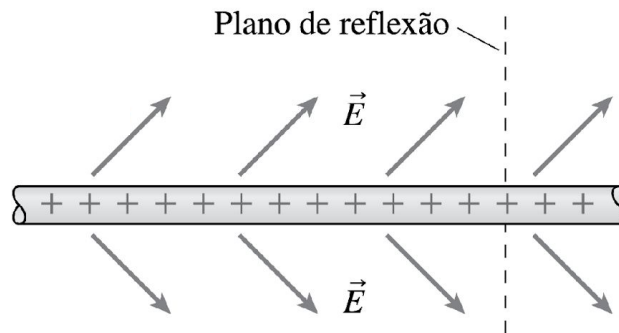
Vista transversal



Simetria na $\rho_{elétrica}$ \longleftrightarrow Simetria no \vec{E}

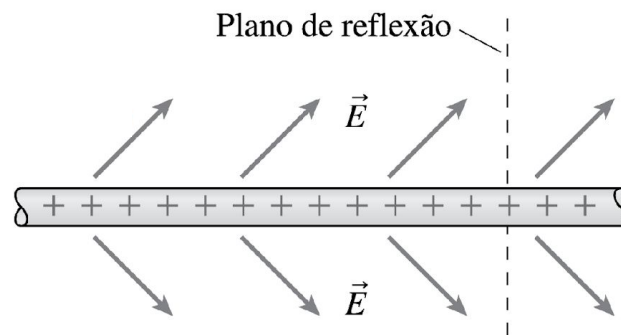
A Lei de Gauss

O fio carregado poderia produzir o campo abaixo?

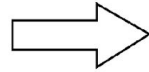
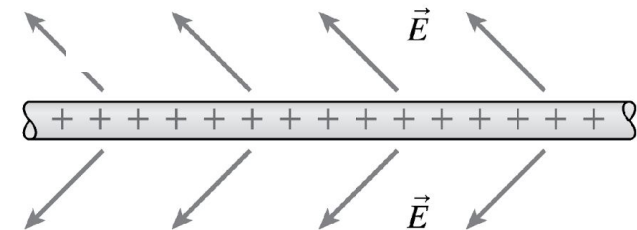


A Lei de Gauss

Simetria na $\rho_{elétrica}$ \longleftrightarrow Simetria no \vec{E}

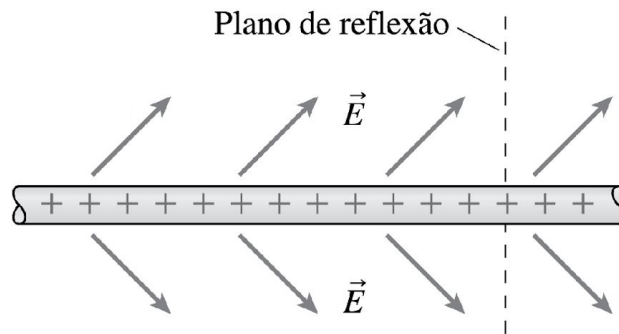


Reflexão

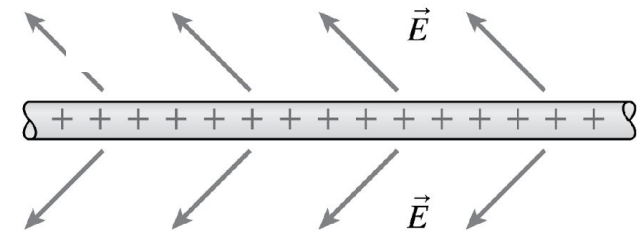



A Lei de Gauss

Simetria na $\rho_{elétrica}$ \longleftrightarrow Simetria no \vec{E}



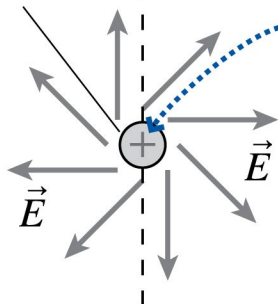
Reflexão



Vista

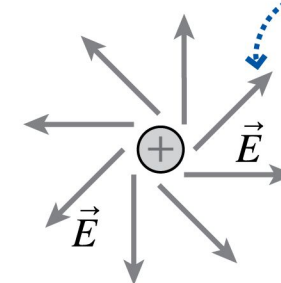
transversal
do cilindro

Plano de reflexão



A distribuição de carga não sofre alteração pela reflexão em um plano que contém o eixo.

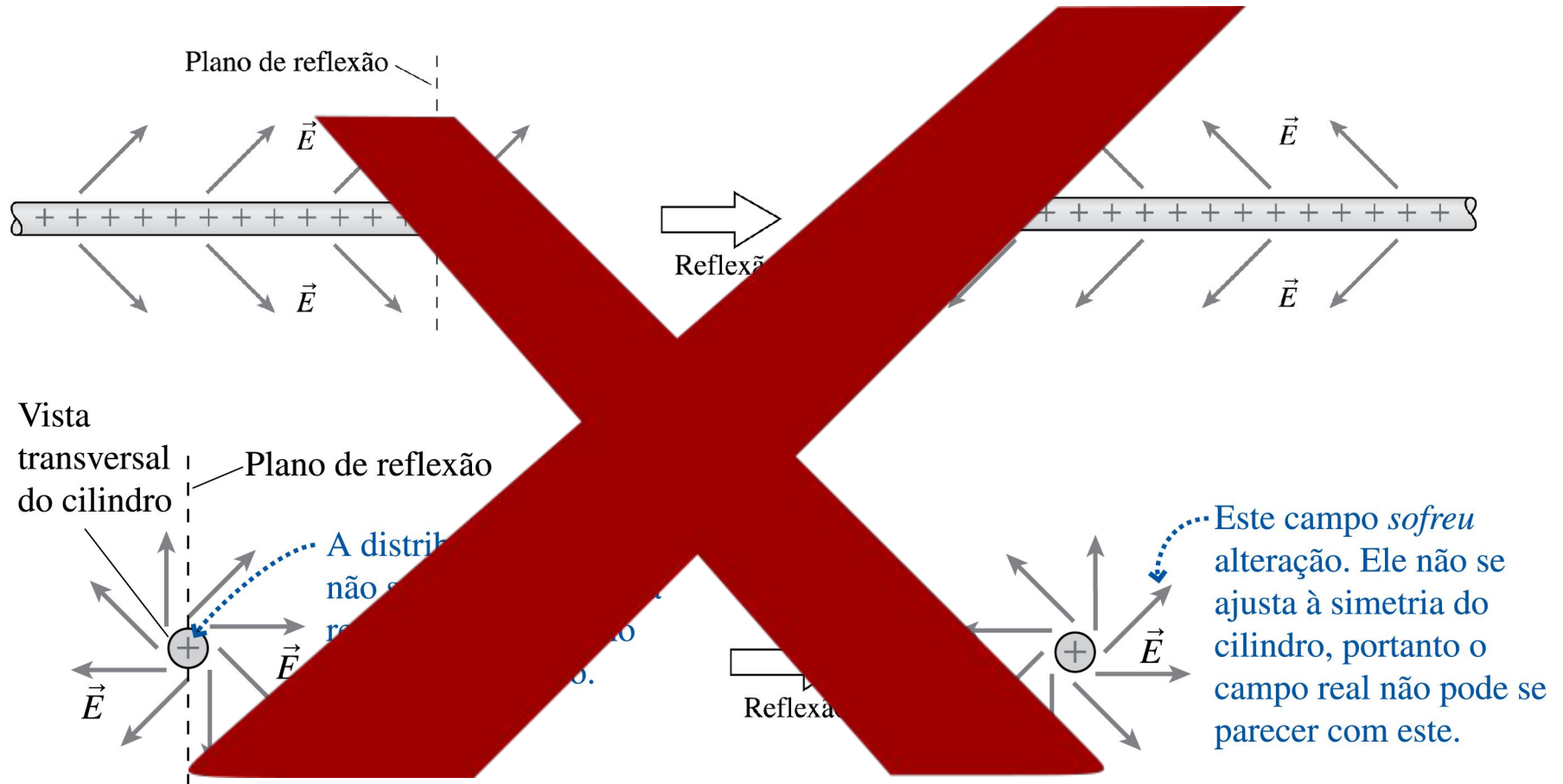
Reflexão



Este campo *sofreu* alteração. Ele não se ajusta à simetria do cilindro, portanto o campo real não pode se parecer com este.

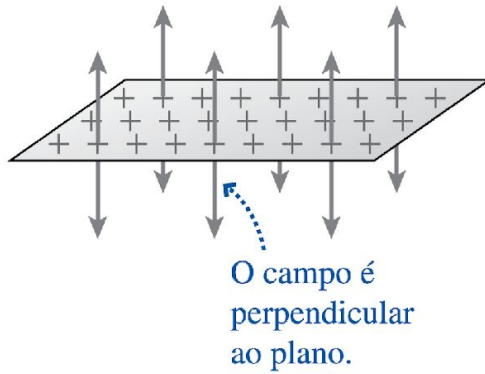
A Lei de Gauss

Simetria na $\rho_{elétrica}$ \longleftrightarrow Simetria no \vec{E}



A Lei de Gauss

Simetria Planar



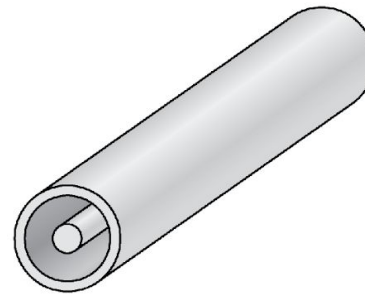
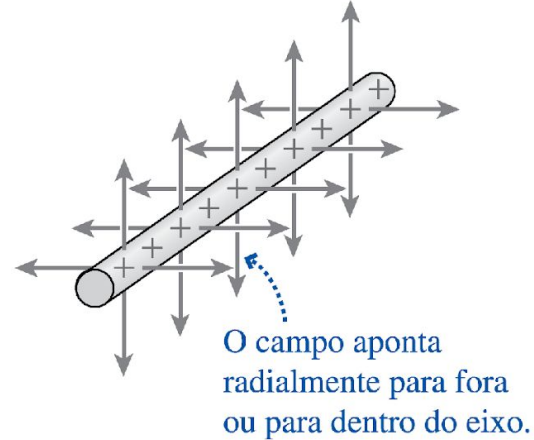
Simetria Básica:

Exemplo mais complexo:



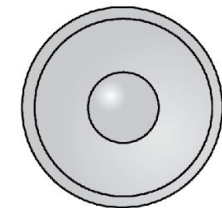
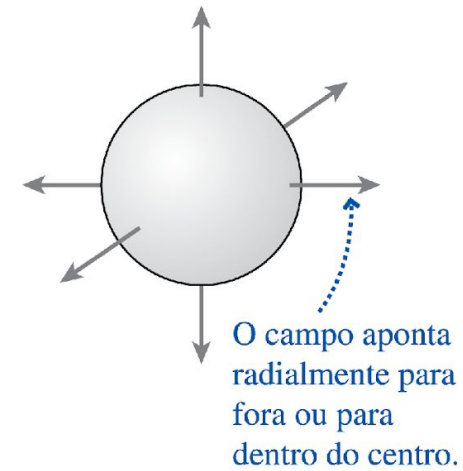
Capacitor de placas paralelas infinitas

Simetria cilíndrica



Cilindros coaxiais

Simetria Esférica



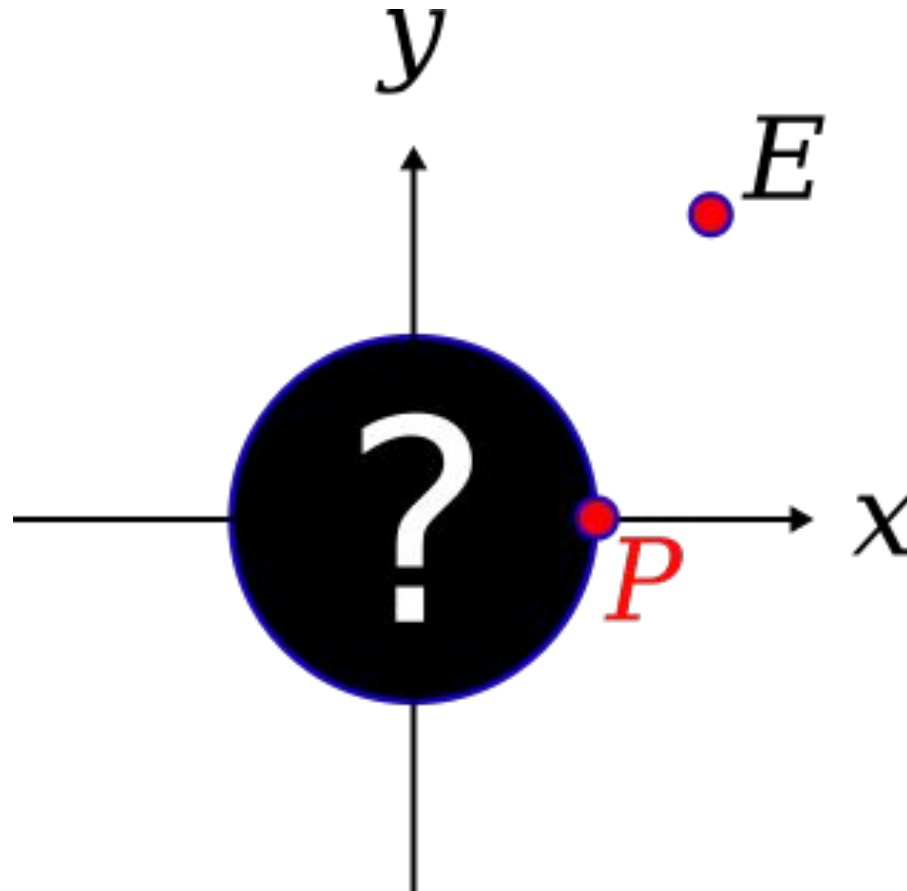
Esferas concêntricas

Simetria na $\rho_{elétrica}$ \longleftrightarrow Simetria no \vec{E}



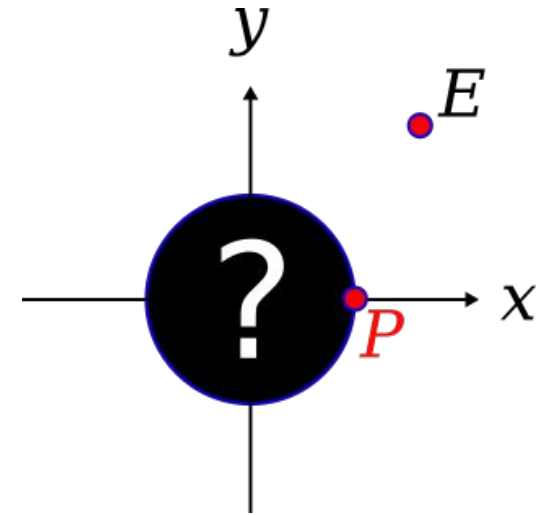
Teste pré-aula

Objetos carregados são movidos (transformados, em linguagem de geometria) enquanto se observa no ponto E o campo elétrico por cada um deles produzido. Os pontos E e P são apenas pontos de referência.





Transformações:

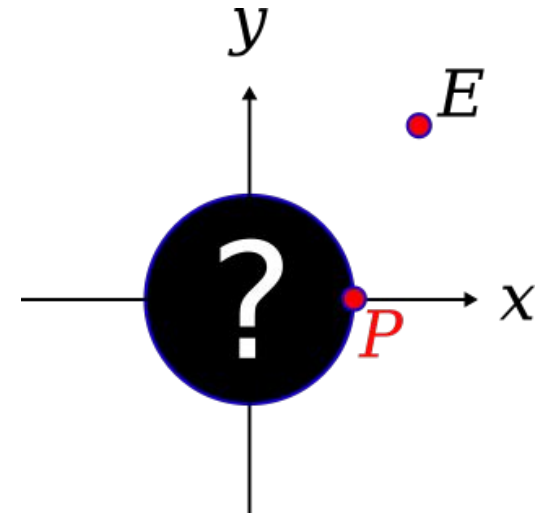


- A)** o objeto é deslocado na direção do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- B)** o objeto é girado em torno do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- C)** o objeto é refletido em torno de $x=0$, invertendo todas as cargas de x positivo para x negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- D)** o objeto é refletido em torno do plano xy , invertendo todas as cargas de y positivo para y negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- E)** objeto é girado de 90° em torno do eixo z de forma que P fique sobre o eixo y . O campo elétrico em E se altera.



Transformações:

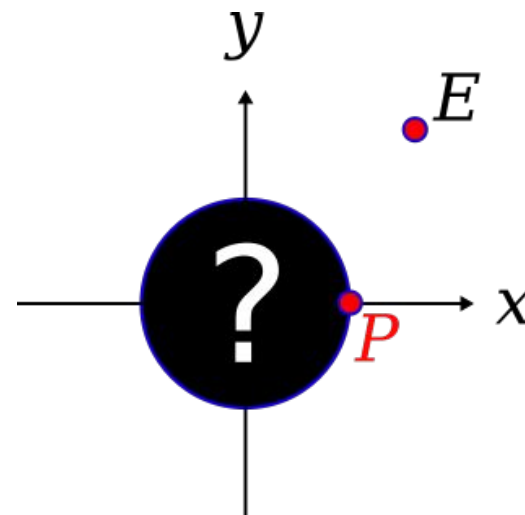
Uma "partícula positivamente carregada posicionada na origem" **satisfaz às cinco transformações?**



- A)** o objeto é deslocado na direção do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- B)** o objeto é girado em torno do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- C)** o objeto é refletido em torno de $x=0$, invertendo todas as cargas de x positivo para x negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- D)** o objeto é refletido em torno do plano xy , invertendo todas as cargas de y positivo para y negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- E)** objeto é girado de 90° em torno do eixo z de forma que P fique sobre o eixo y . O campo elétrico em E se altera.

Transformações:

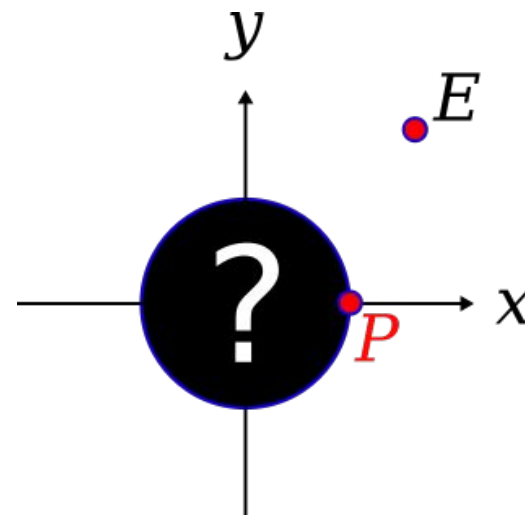
Uma "bola metálica de raio R carregada positivamente posicionada na origem." satisfaz às cinco transformações?



- A) o objeto é deslocado na direção do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- B) o objeto é girado em torno do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- C) o objeto é refletido em torno de $x=0$, invertendo todas as cargas de x positivo para x negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- D) o objeto é refletido em torno do plano xy , invertendo todas as cargas de y positivo para y negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- E) objeto é girado de 90° em torno do eixo z de forma que P fique sobre o eixo y . O campo elétrico em E se altera.

Transformações:

Um "fio metálico carregado e infinito paralelo ao eixo z ." **satisfaz às cinco transformações?**

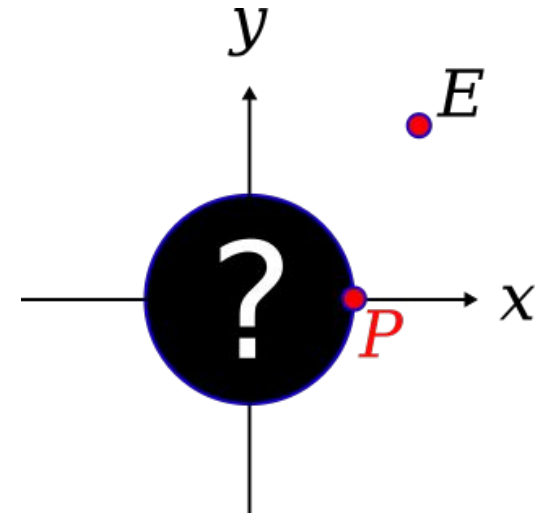


- A)** o objeto é deslocado na direção do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- B)** o objeto é girado em torno do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- C)** o objeto é refletido em torno de $x=0$, invertendo todas as cargas de x positivo para x negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- D)** o objeto é refletido em torno do plano xy , invertendo todas as cargas de y positivo para y negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- E)** objeto é girado de 90° em torno do eixo z de forma que P fique sobre o eixo y . O campo elétrico em E se altera.



Transformações:

Um "fio metálico carregado e infinito paralelo ao eixo x ." **satisfaz às cinco transformações?**

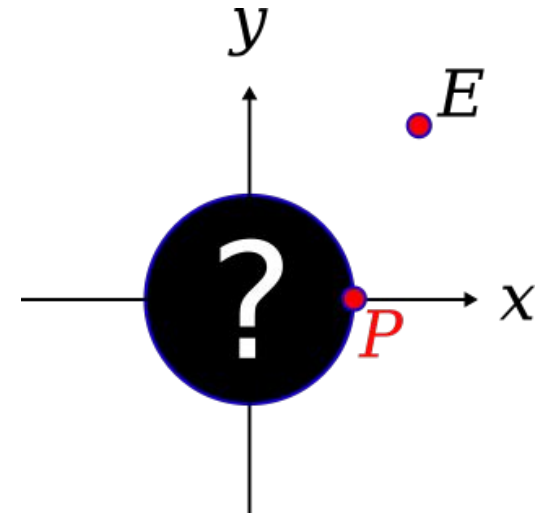


- A)** o objeto é deslocado na direção do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- B)** o objeto é girado em torno do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- C)** o objeto é refletido em torno de $x=0$, invertendo todas as cargas de x positivo para x negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- D)** o objeto é refletido em torno do plano xy , invertendo todas as cargas de y positivo para y negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- E)** objeto é girado de 90° em torno do eixo z de forma que P fique sobre o eixo y . O campo elétrico em E se altera.



Transformações:

Um "disco plano infinito carregado e paralelo ao plano zx ." **satisfaz às cinco transformações?**



- A)** o objeto é deslocado na direção do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- B)** o objeto é girado em torno do eixo x e o campo elétrico em E não se altera.
- C)** o objeto é refletido em torno de $x=0$, invertendo todas as cargas de x positivo para x negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- D)** o objeto é refletido em torno do plano xy , invertendo todas as cargas de y positivo para y negativo e vice versa. O campo elétrico em E não se altera.
- E)** objeto é girado de 90° em torno do eixo z de forma que P fique sobre o eixo y . O campo elétrico em E se altera.

A Lei de Gauss

Os argumentos de simetria nos ajudam a resolver problemas de cálculo de campo elétrico...

Lembrando que tudo que sabemos é:

- Todo campo elétrico aponta para fora de cargas positivas, e em direção às cargas negativas.
- O campo elétrico exerce uma força elétrica sobre qq carga elétrica.



O simples fato das simetrias permitirem eliminar possíveis formas do campo algumas vezes é tão importante quanto determinar a forma do campo. Pelo processo de eliminação podemos até concluir, com exatidão, a forma do E .



A Lei de Gauss

Entretanto, a forma do campo não é tudo.

Considerando essa abordagem de simetria, falta agora desenvolvermos uma maneira de calcular a intensidade do campo elétrico...

$$\vec{E} \propto \vec{r} \quad ???$$

$$\vec{E} \propto \frac{1}{r} \vec{r} \quad ???$$

$$\vec{E} \propto \frac{1}{r^2} \vec{r} \quad ???$$



A Lei de Gauss

Cálculo do fluxo de campo elétrico

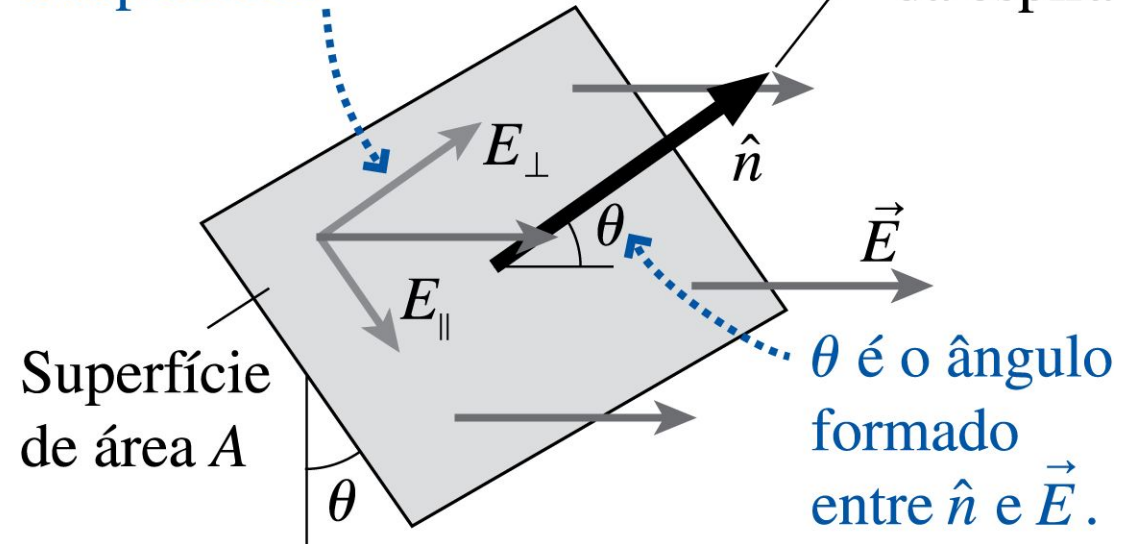
O fluxo elétrico é uma quantidade de campo elétrico que atravessa uma área A .

Matematicamente, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\Phi_e &\equiv \vec{E} \cdot \vec{A} \\ &= E_{\perp} A \\ &= EA \cos \theta\end{aligned}$$

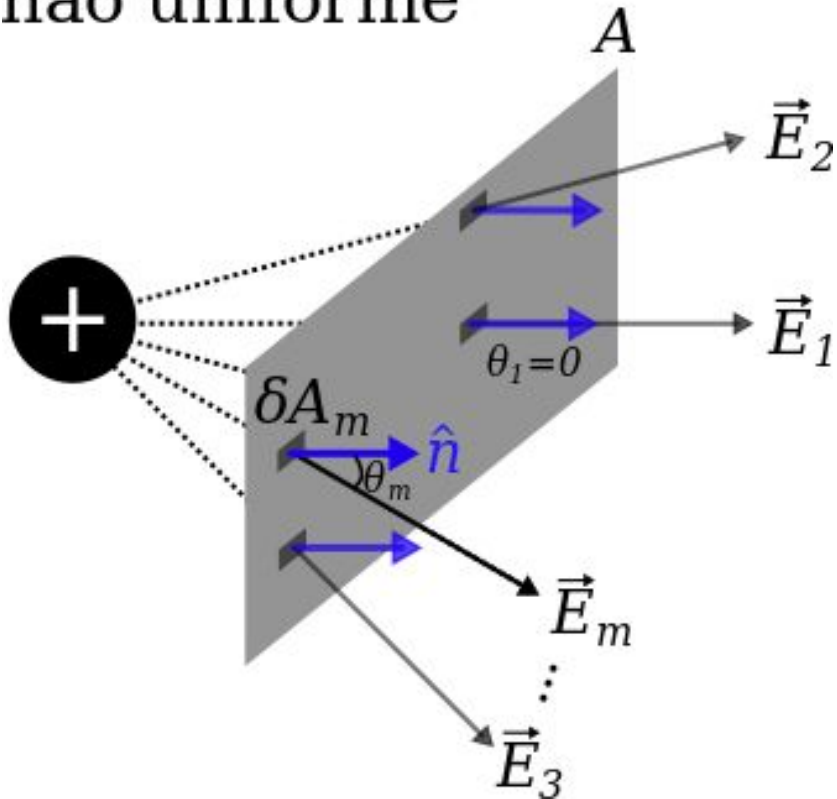
$E_{\perp} = E \cos \theta$ é o componente do campo elétrico que atravessa a superfície.

Normal ao plano da espira



A Lei de Gauss

Campo Elétrico não uniforme

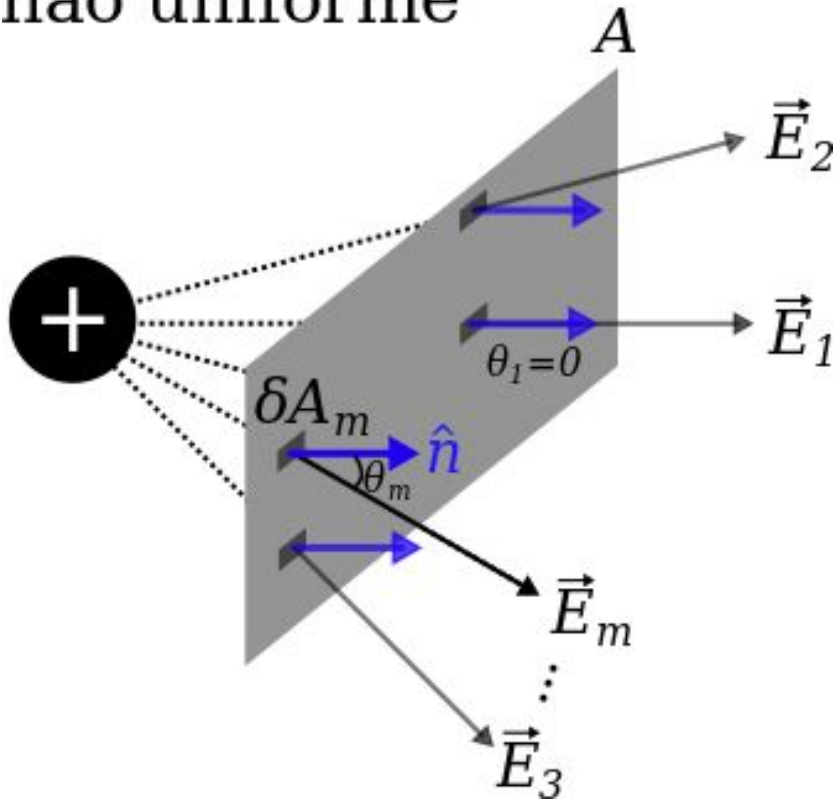


O fluxo elétrico sobre uma superfície pode ser calculado como a soma dos fluxos através de pequenos pedaços da superfície.

$$\begin{aligned}
 \Phi_e &= \delta\Phi_1 + \delta\Phi_2 + \dots + \delta\Phi_m \\
 &= \sum_{i=1}^m \delta\Phi_i \\
 &= \sum_{i=1}^m \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i
 \end{aligned}$$

A Lei de Gauss

Campo Elétrico não uniforme



O fluxo elétrico sobre uma superfície pode ser calculado como a soma dos fluxos através de pequenos pedaços da superfície.

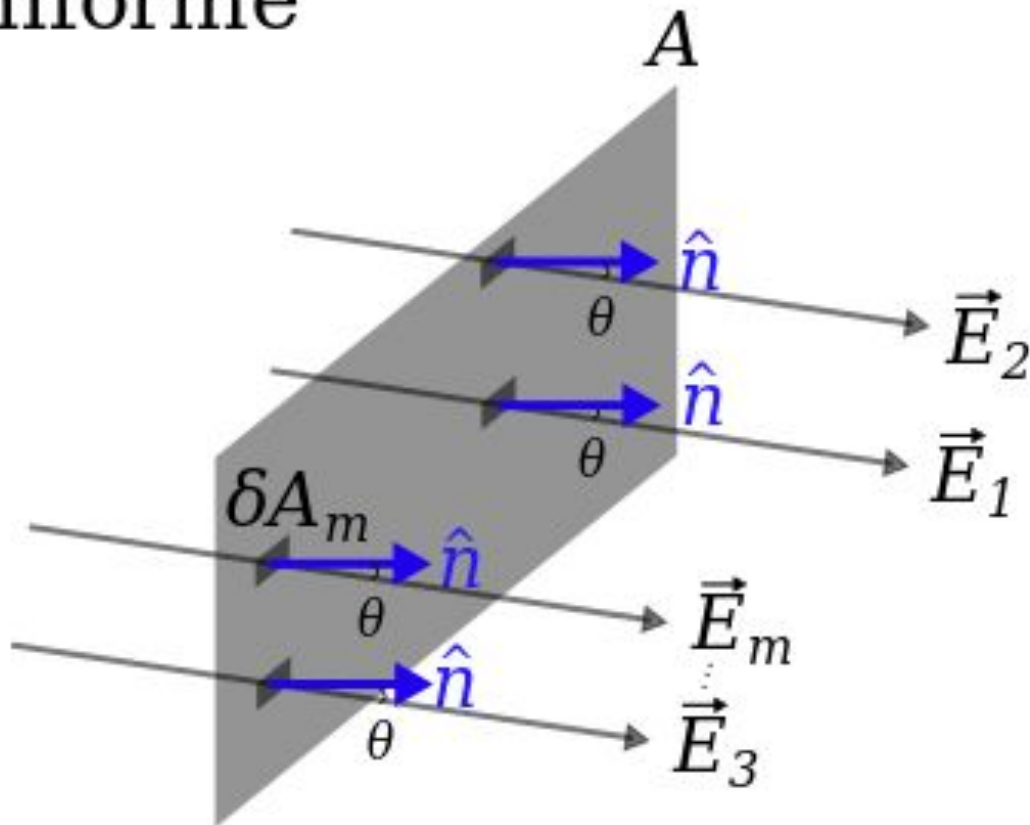
$$\begin{aligned}
 \Phi_e &= \delta\Phi_1 + \delta\Phi_2 + \dots + \delta\Phi_m \\
 &= \sum_{i=1}^m \delta\Phi_i \\
 &= \sum_{i=1}^m \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i
 \end{aligned}$$

Fazendo $\delta\vec{A} \rightarrow d\vec{A}$

$$\Phi_e = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

A Lei de Gauss

Campo Elétrico uniforme

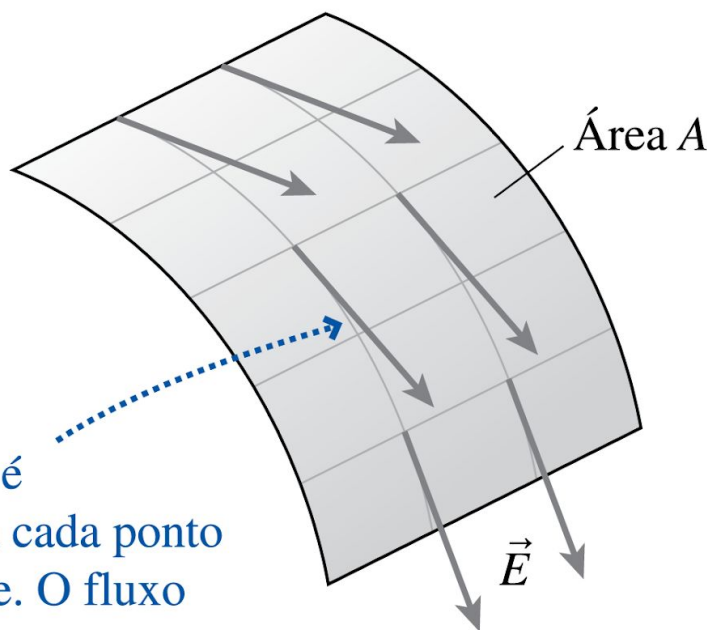


$$\begin{aligned}
 \Phi_e &= \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\
 &= \int_{sup} E \cos \theta dA \\
 &= E \cos \theta \int_{sup} dA \\
 &= E \cos \theta A
 \end{aligned}$$

A Lei de Gauss

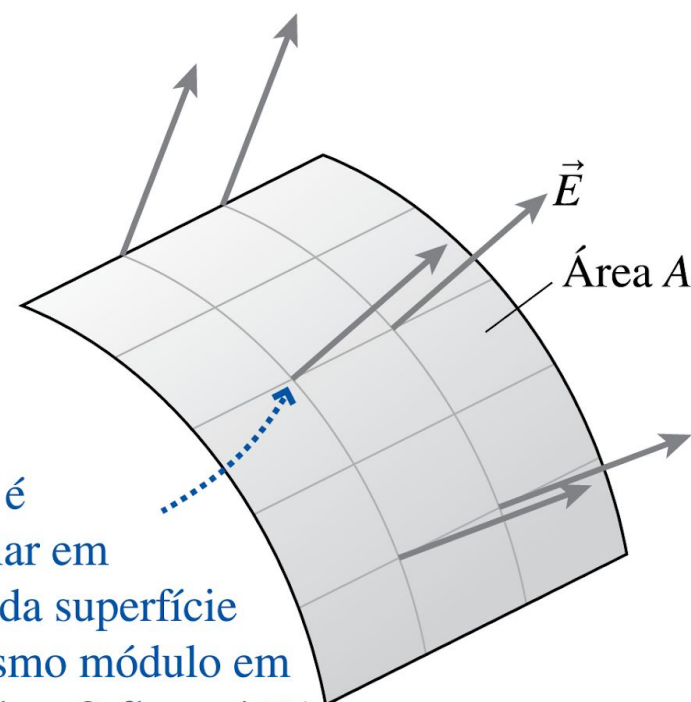
Fluxo através de uma superfície curva: dois casos especiais

$\vec{E} \parallel \text{superfície}$



O campo \vec{E} é tangente em cada ponto da superfície. O fluxo é nulo.

$\vec{E} \perp \text{superfície}$



O campo \vec{E} é perpendicular em cada ponto da superfície e tem o mesmo módulo em cada um deles. O fluxo é EA .

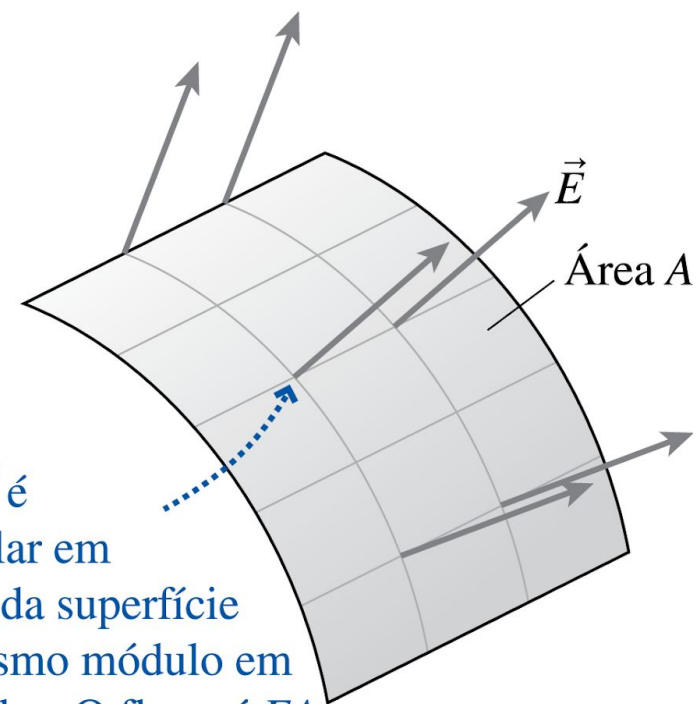
A Lei de Gauss

Fluxo através de uma superfície curva:

caso: $\vec{E} \perp$ superfície

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{sup} E \cos 0 dA \\ &= E \int_{sup} dA \\ &= EA\end{aligned}$$

(b)



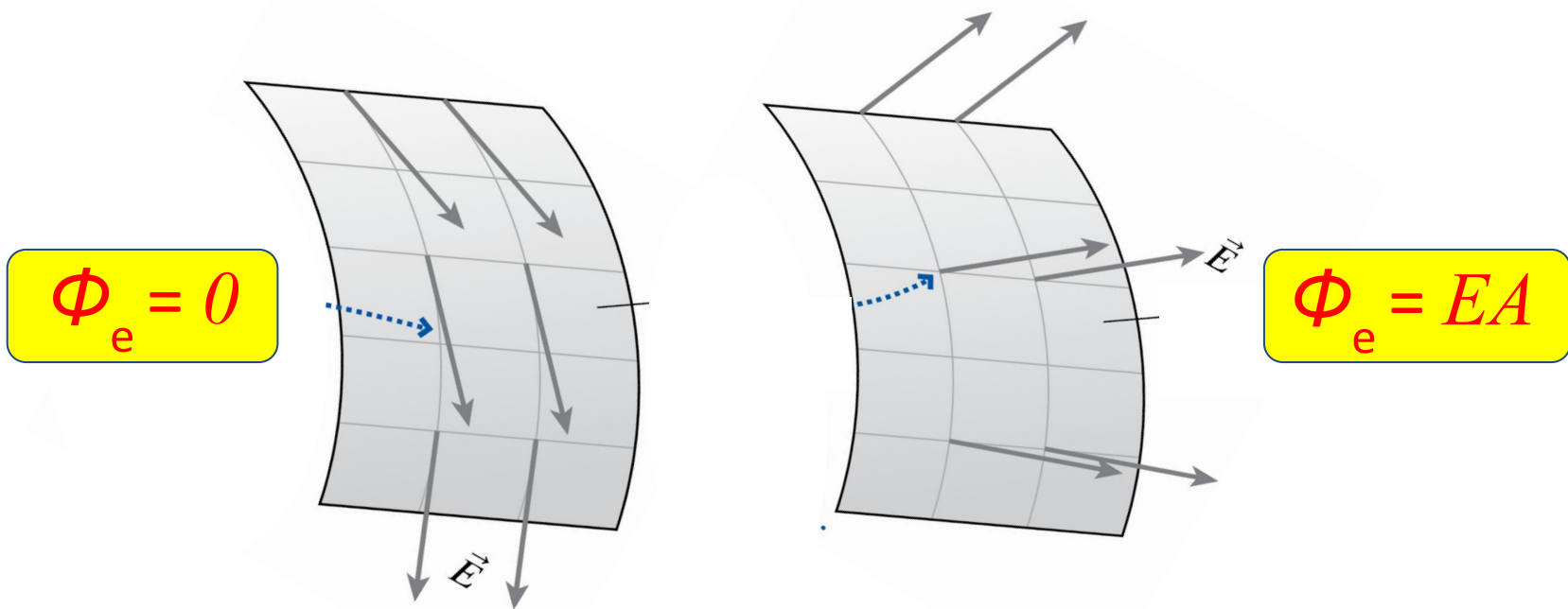
O campo \vec{E} é perpendicular em cada ponto da superfície e tem o mesmo módulo em cada um deles. O fluxo é EA .

O fato de o módulo do campo elétrico ser cte em toda a superfície nos permitiu sacar para fora da integral o valor cte de E ...



A Lei de Gauss

Fluxo através de uma superfície curva: dois casos especiais



Em resumo:

- Se o campo elétrico for tangente a uma superfície em todos os pontos da mesma, o fluxo elétrico através da superfície será $\Phi_e = 0$.
- Se o campo elétrico for perpendicular a uma superfície em qualquer ponto da mesma e tiver mesmo módulo em qualquer ponto, o fluxo através da superfície será $\Phi_e = EA$.



Teste conceitual 1

Um retângulo de área A situa-se no plano xz . Quanto valerá Φ_e se

$$\vec{E} = (E_{0x} \hat{i} + E_{0y} \hat{k})$$

- A) 0
- B) $E_{0x} A$
- C) $E_{0y} A$
- D) $(E_{0x} + E_{0y}) A$

A Lei de Gauss

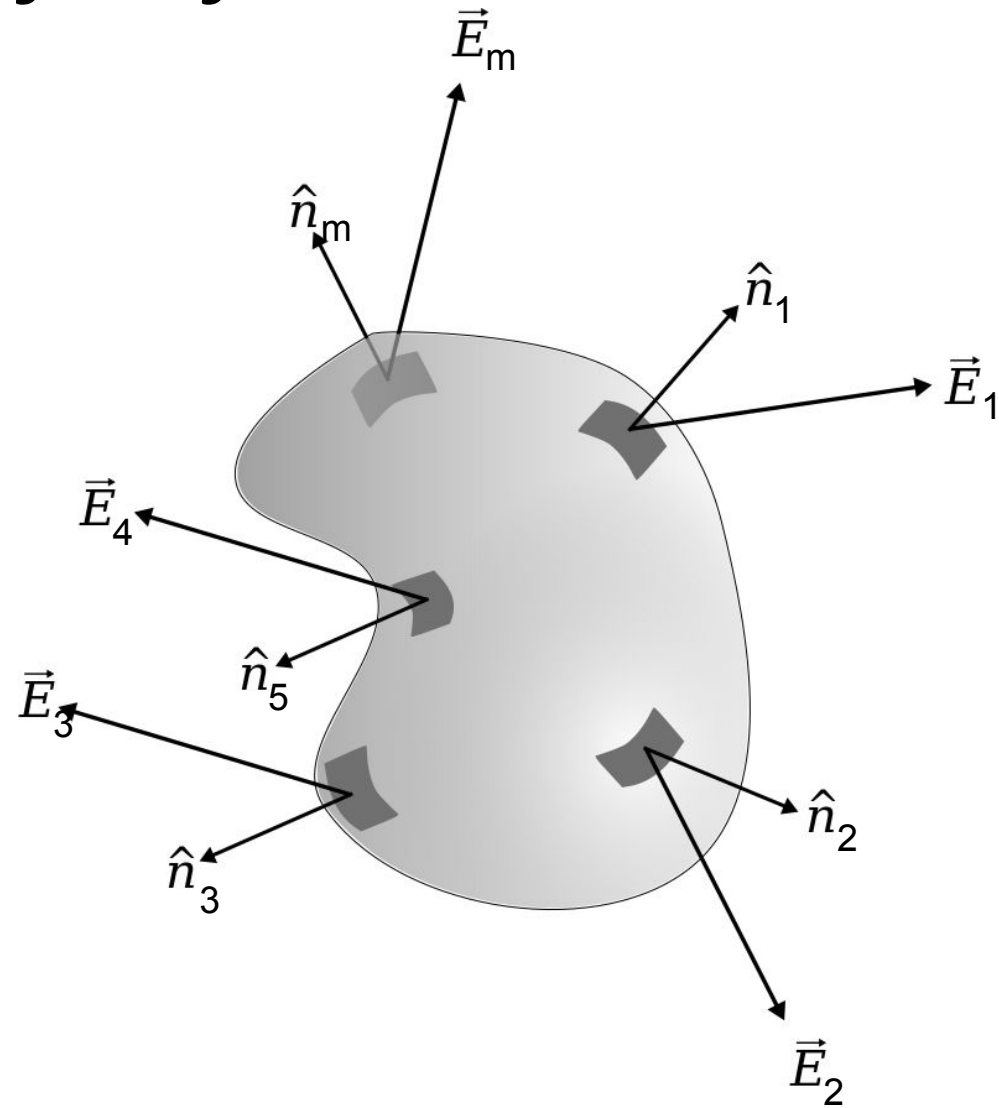
Problema

Quanto vale o fluxo do campo elétrico $(24 \text{ N/C})\hat{i} + (30 \text{ N/C})\hat{j} + (16 \text{ N/C})\hat{k}$ através de uma porção de $2,0 \text{ m}^2$ do plano yz ?

A Lei de Gauss

Fluxo através de uma *superfície fechada*:

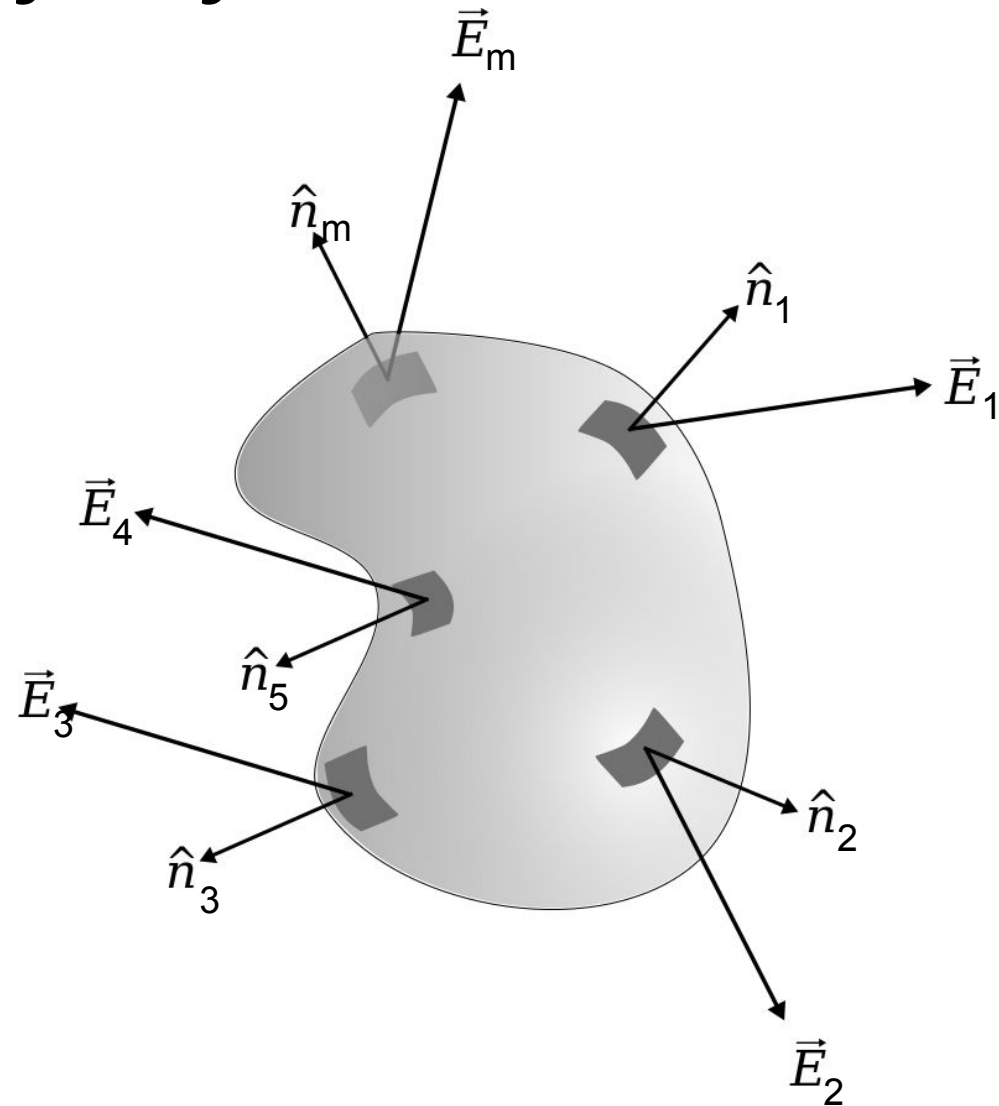
$$\Phi_e = ?$$



A Lei de Gauss

Fluxo através de uma *superfície fechada*:

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \delta\Phi_1 + \delta\Phi_2 + \cdots + \delta\Phi_m \\ &= \sum_{i=1}^m \delta\Phi_i \\ &= \sum_{i=1}^m \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i\end{aligned}$$



Nota: O vetor $d\vec{A}$ sempre aponta para fora da superfície. Isso remove uma ambiguidade que estava presente quando tratamos de sup aberta.

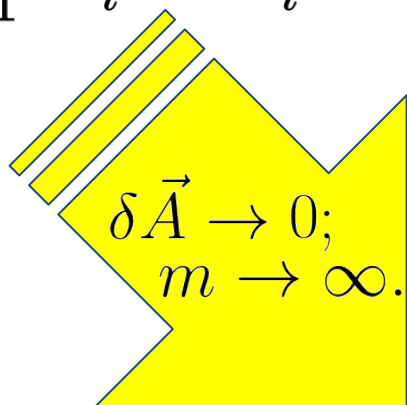
A Lei de Gauss

Fluxo através de uma *superfície fechada*:

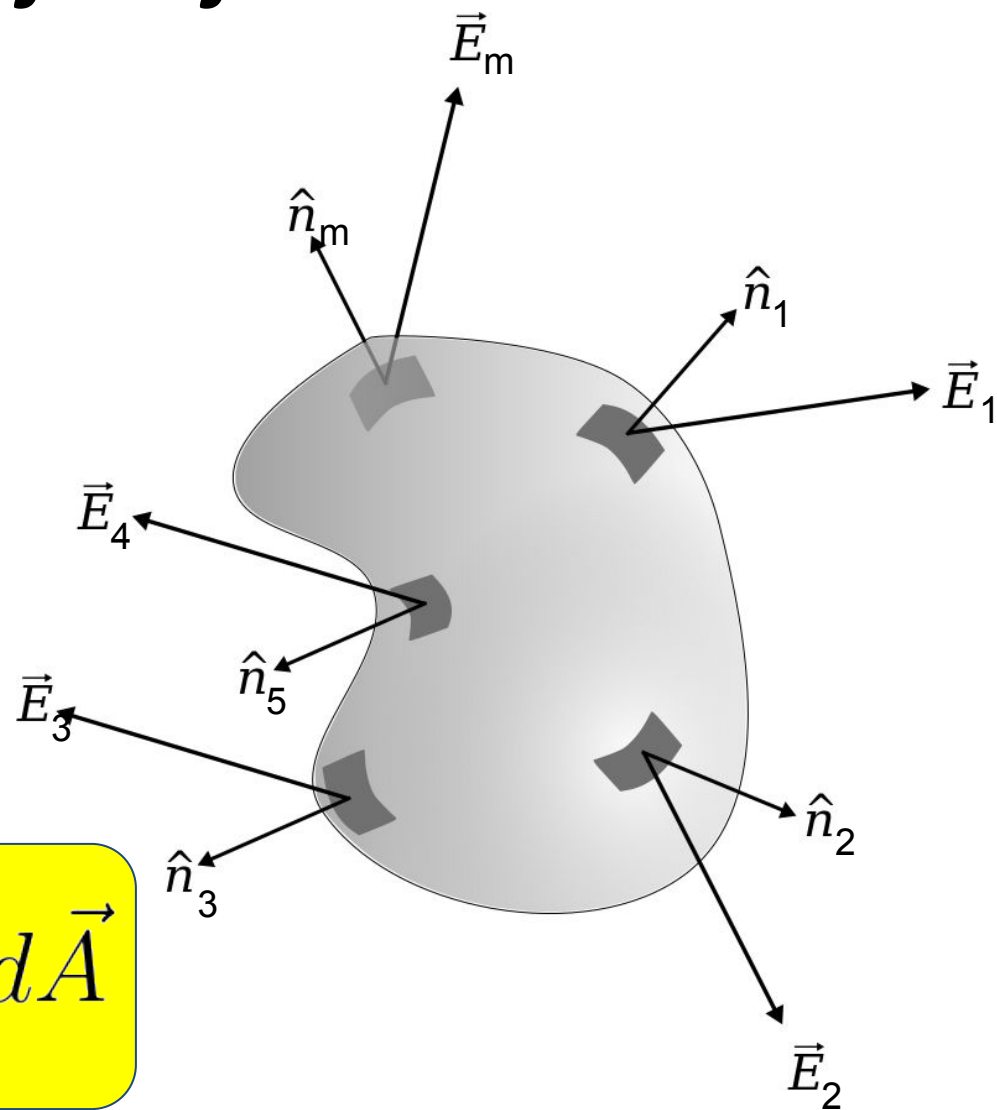
$$\Phi_e = \delta\Phi_1 + \delta\Phi_2 + \cdots + \delta\Phi_m$$

$$= \sum_{i=1}^m \delta\Phi_i$$

$$= \sum_{i=1}^m \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i$$



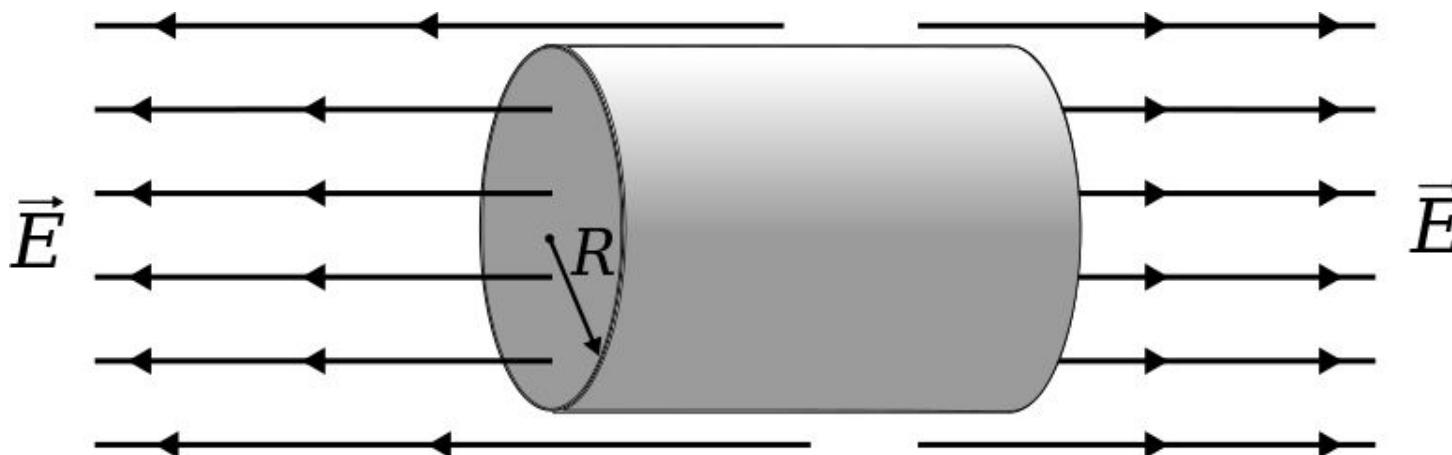
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



Nota: O vetor $d\vec{A}$ sempre aponta para fora da superfície. Isso remove uma ambiguidade que estava presente quando tratamos de sup aberta.

Teste conceitual 3

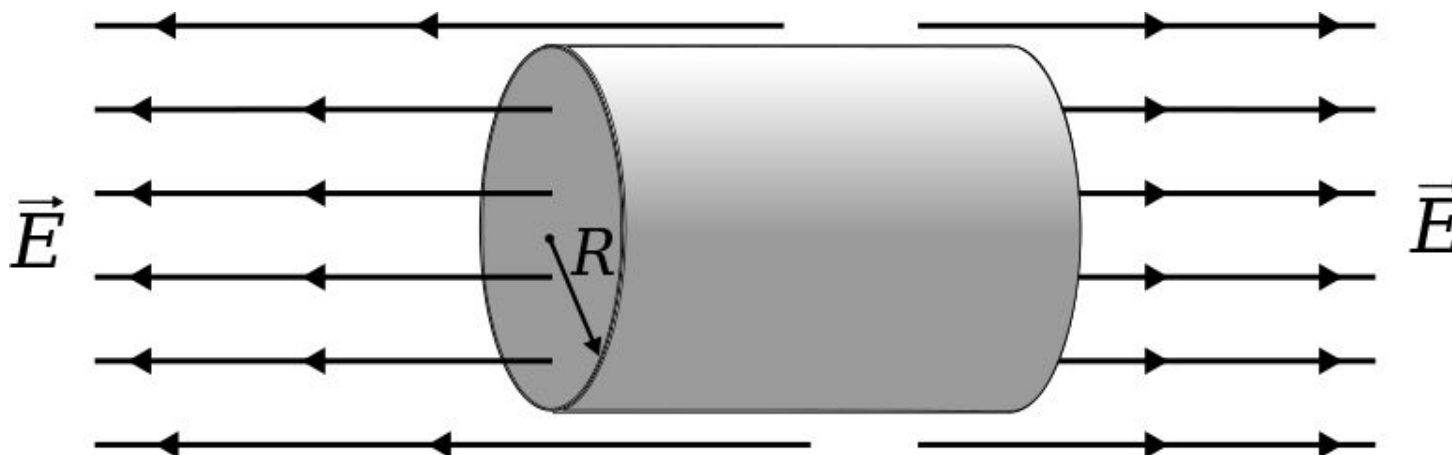
Quanto vale o fluxo elétrico resultante através do cilindro abaixo?



- A) 0
- B) $E\pi R^2$
- C) $E2\pi R$
- D) $E2\pi R^2$

Teste conceitual

Quanto vale o fluxo elétrico resultante através do cilindro abaixo?



- A) 0
- B) $E\pi R^2$
- C) $E2\pi R$
- D) $E2\pi R^2$**