CAP. 11 : EQUAÇÕES DE MAXWELL

1) LEIS BÁSICAS DO ELETROMAGNETISMO:

NOS CAPÍTULOS ANTERIORES, ENUNCIAMOS LEIS FÍSICAS QUE DESCREVEM A DINÂMICA DE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS E SUAS APLICAÇÕES. EM PARTICULAR, ENUNCIAMOS A LEI DE GAUSS QUE VERSA SOBRE O FLUXO ELÉTRICO ATRAVÉS DE UMA SUPERFÍCIE FECHADA. DADA UMA SUPERFÍCIE FECHADA S E UMA DISTRIBUIÇÃO DE CARGA EM SEU INTERIOR, Q_{int}, A LEI DE GAUSS NOS FORNECE QUE

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} .$$

ANALOGAMENTE, DISCUTIMOS QUE NÃO EXISTEM MONOPOLOS MAGNÉTICOS E, PORTANTO, O FLUXO DE CAMPO MAGNÉTICO ATRAVÉS DE UMA SUPERFÍCIE FECHADA VALE ZERO. MATEMATICAMENTE, ISTO É EXPRESSO POR

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 .$$

NA LINGUAGEM DE LINHAS DE CAMPO, CARGAS ELÉTRICAS SERVEM COMO PONTOS DE SAÍDA OU CHEGADA DE LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO. NO CASO DO CAMPO MAGNÉTICO, AS LINHAS DE CAMPO SERÃO SEMPRE FECHADAS, POIS NÃO HÁ CARGAS DE ONDE LINHAS POSSAM SAIR OU CHEGAR.

AS DUAS EQUAÇÕES ANTERIORES IMPÕE VÍNCULOS SOBRE CAMPOS VETORIAIS QUE DESCREVEM CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS. DEVEMOS LEMBRAR QUE TAIS EXPRESSÕES DECORREM DE FATOS EXPERIMENTAIS BEM ESTABELECIDOS.

VIMOS QUE A VARIAÇÃO TEMPORAL DO FLUXO MAGNÉTICO GERA UM CAMPO ELÉTRICO. ESTE FATO EXPERIMENTAL É DESCRITO MATEMATICAMENTE PELA LEI DE FARADAY,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} ,$$

ONDE C É A CURVA QUE DELIMITA A SUPERFÍCIE ATRAVÉS DA QUAL CALCULAMOS O FLUXO MAGNÉTICO. A LEI DE FARADAY ESTABELECE UMA CLARA RELAÇÃO ENTRE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS.

FINALMENTE, A LEI DE AMPÈRE ESTABELECE UMA CONEXÃO ENTRE CORRENTES ELÉTRICAS E CAMPOS MAGNÉTICOS:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i ,$$

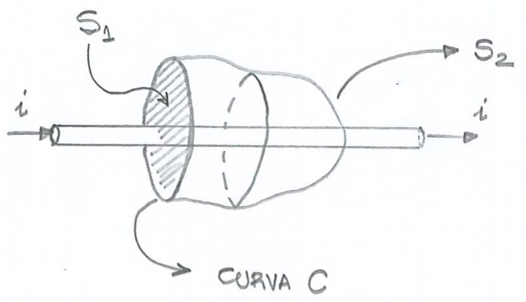
ONDE i É A CORRENTE QUE ATRAVESSA A SUPERFÍCIE DELIMITADA PELA CURVA C.

ESSAS QUATRO EQUAÇÕES CONDENSAM DIVERSOS FATOS EXPERIMENTAIS SOBRE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS E SUAS SOLUÇÕES, PORTANTO, DESCREVEM CAMPOS REAIS QUE MEDIMOS EM UM LABORATÓRIO. ENTRETANTO, EXISTEM DUAS OBSERVAÇÕES QUE MERECEM DESTAQUE: (1) NÃO EXISTEM "CARGAS MAGNÉTICAS" E, PORTANTO, EXISTE UMA DIFERENÇA CLARA ENTRE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS COMO PODEMOS VER PELAS duas primeiras equações e (2): não há um termo na Lei de Ampère que seja análogo à variação de fluxo magnético na Lei de Faraday. Em outras palavras: é possível criar campos magnéticos pela variação de fluxo elétrico?

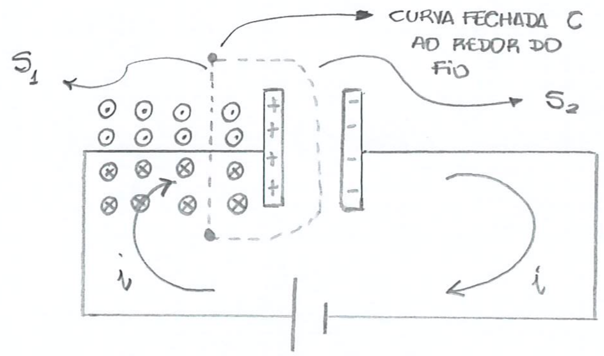
Enquanto a observação (1) parece estar em acordo com observações (nunca foi detectado um monopolo magnético), a observação (2) pode ser confrontada tanto por exemplos abstratos quanto por experimentos. De fato, Maxwell observou que a Lei de Ampère deve ser modificada para que seja completamente consistente.

2) Corrente de deslocamento:

No uso da Lei de Ampère, integramos o campo magnético ao longo de uma curva que delimita uma superfície. Esta integral equivale à corrente elétrica que atravessa tal superfície. Apesar de muitas vezes escolhermos superfícies planas (por praticidade computacional), nada nos impede de adotarmos superfícies mais complicadas. Veja o exemplo abaixo:



A corrente que atravessa S_1 é a mesma que atravessa S_2. Portanto, a Lei de Ampère pode ser aplicada para qualquer escolha de superfície que tenha C como borda. Portanto, podemos considerar uma situação particularmente sutil: consideremos um capacitor sendo carregado por uma bateria. Neste caso, tomemos as superfícies destacadas na figura abaixo:

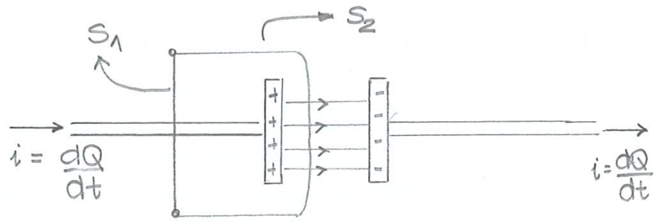


A bateria é responsável por transportar as cargas da placa da direita para a placa da esquerda, estabelecendo, portanto uma corrente elétrica i. Esta corrente produz um campo magnético destacado na figura. A curva C delimita duas superfícies S_1 e S_2. Através de S_1, vemos explicitamente a travessia da corrente i. Entretanto, se considerarmos S_2, nenhuma corrente atravessa a referida superfície. Pela Lei de Ampère, temos:

$$S_1: \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 i$$

$$S_2: \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = 0$$

Portanto, há uma flagrante contradição entre os resultados acima, a depender da escolha de S_1 ou S_2. Esta constatação nos leva a conjecturar que a Lei de Ampère necessita de uma adaptação. Esta foi a percepção que levou Maxwell a compreender que apesar de não haver corrente através de S_2, há variação do fluxo elétrico produzido pelo campo elétrico entre as placas do capacitor. Calculemos o fluxo elétrico através de uma superfície de área A conforme indicado na figura a seguir,



O FLUXO ELÉTRICO Φ_E ATRAVÉS DE S_2 É:

$$\Phi_E = |\vec{E}|\, A$$

POR OUTRO LADO, O CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO PELO CAPACITOR É: $|\vec{E}| = Q/\epsilon_0 A$

$$\Rightarrow \quad \Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0} .$$

PORÉM,

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{i}{\epsilon_0} .$$

ISTO SUGERE QUE $\epsilon_0 \, d\Phi_E/dt$ É EQUIVALENTE À i E SE MODIFICÁSSEMOS A LEI DE AMPÈRE POR UM TERMO CONTENDO $d\Phi_E/dt$, TEMOS A POSSIBILIDADE DE CONECTAR OS RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DE S_1 E S_2. A GRANDEZA i_{des} DADA POR

$$i_{des} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

FOI CHAMADA POR MAXWELL DE CORRENTE DE DESLOCAMENTO. MAXWELL REFORMULOU A LEI DE AMPÈRE COMO

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i + \mu_0 i_{des} =$$

$$= \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

PORTANTO, A LEI DE AMPÈRE-MAXWELL COMPLETA, CONSISTENTEMENTE O CONJUNTO DE EQUAÇÕES QUE DESCREVEM O CAMPO ELETROMAGNÉTICO.

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}$$

PORTANTO, OBSERVAMOS QUE CAMPOS MAGNÉTICOS PODEM SER CRIADOS POR CORRENTES ELÉTRICAS OU POR CAMPOS ELÉTRICOS CUJOS FLUXOS VARIAM NO TEMPO. CAMPOS MAGNÉTICOS PRODUZIDOS POR CAMPOS ELÉTRICOS SÃO CHAMADOS DE CAMPOS INDUZIDOS.

3) EQUAÇÕES DE MAXWELL:

MAXWELL FOI RESPONSÁVEL POR COLETAR AS DIFERENTES DESCOBERTAS SOBRE O CAMPO ELETROMAGNÉTICO E TRADUZI-LAS EM EQUAÇÕES MATEMÁTICAS CONSISTENTES. ESSAS EQUAÇÕES SÃO CONHECIDAS HOJE COMO EQS DE MAXWELL E SÃO ESCRITAS COMO:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

ESSAS EQUAÇÕES NOS DIZEM COMO CAMPOS PODEM SER CRIADOS POR CARGAS E CORRENTES, BEM COMO PODEM SER INDUZIDOS POR VARIAÇÕES TEMPORAIS DE FLUXOS DE OUTROS CAMPOS. UMA VEZ QUE TENHAMOS TODAS AS INFORMAÇÕES SOBRE OS CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO, PODEMOS ESTUDAR O MOVIMENTO DE UM OBJETO IMERSO NESSES CAMPOS. PARA ISSO, DEVEMOS UTILIZAR A EXPRESSÃO PARA A FORÇA DE LORENTZ,

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$