

Capítulo 28 - A Lei de Gauss

Instrutor: Prof. Carlos Eduardo Souza - Cadu

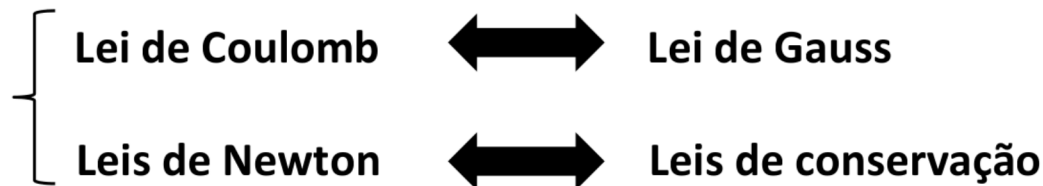
**Sala: A2-15 (IF, andar 1P)
Email: carlooseduardosouza@id.uff.br**

● Objetivos destas aulas:

- 1- Usar simetrias do sistema para determinar o campo elétrico $\vec{E}$
- 2- Calcular o fluxo de $\vec{E}$ através de uma superfície
- 3- Calcular (com facilidade) o $\vec{E}$ em distribuições de carga simétricas
- 4- Usar a Lei de Gauss para explicar propriedades de metais em equilíbrio.

Apresentação

- A Lei de Gauss permite o cálculo de alguns campos elétricos dotados de alto grau de simetria.

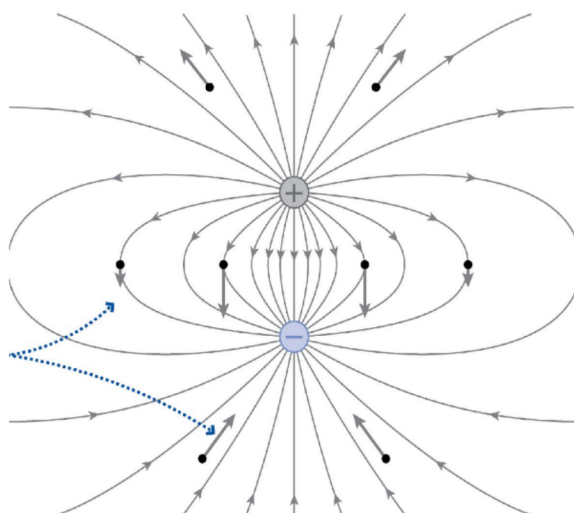


"A Lei de Gauss estabelece a relação entre o fluxo de campo elétrico através de uma superfície fechada com a carga elétrica que existe dentro do volume limitado por esta superfície"

Estudo da simetria

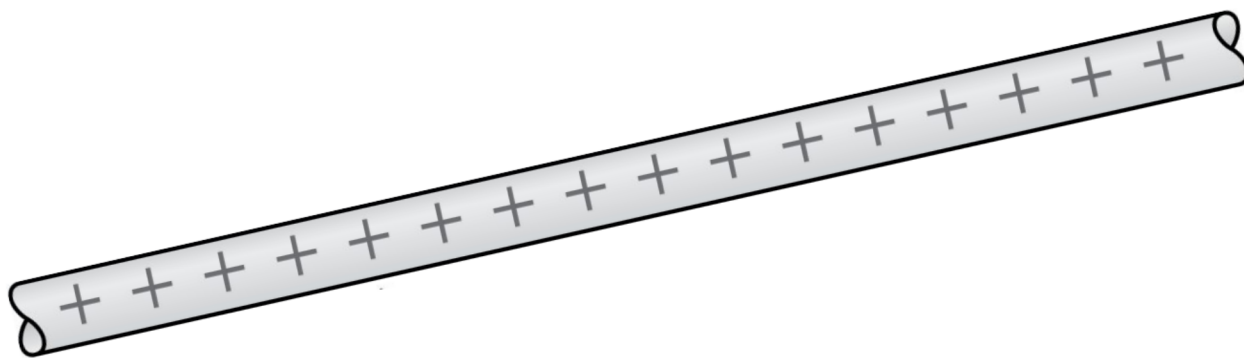
Vamos a alguns fatos...

- Todo $\vec{E}$ aponta para fora (dentro) de cargas +(-)
- $\vec{E}$ exerce uma força elétrica sobre qq carga elétrica

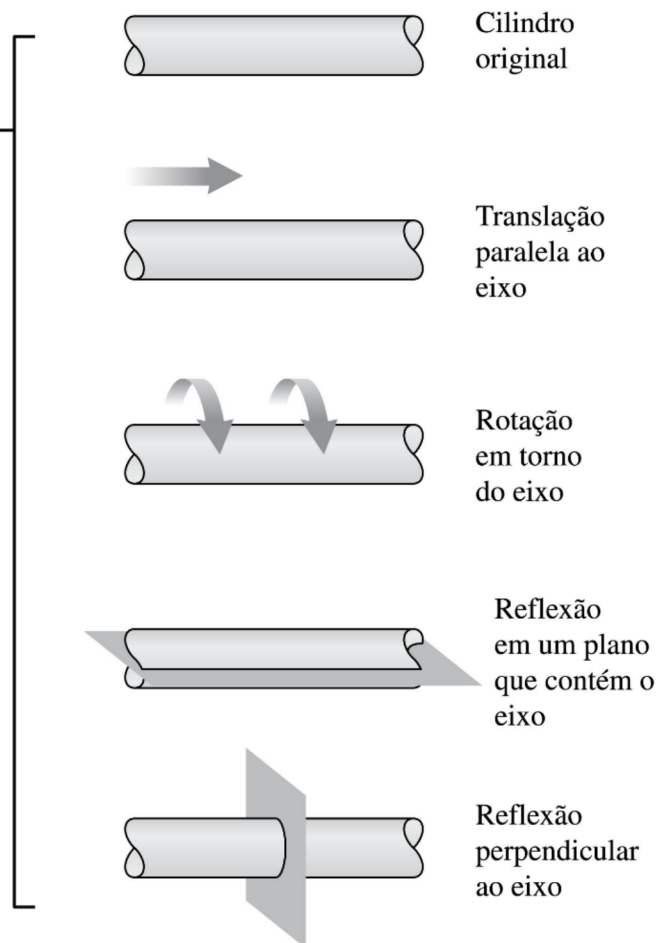


Aula passada...

Deduzimos algumas características de um cilindro infinitamente longo e carregado.

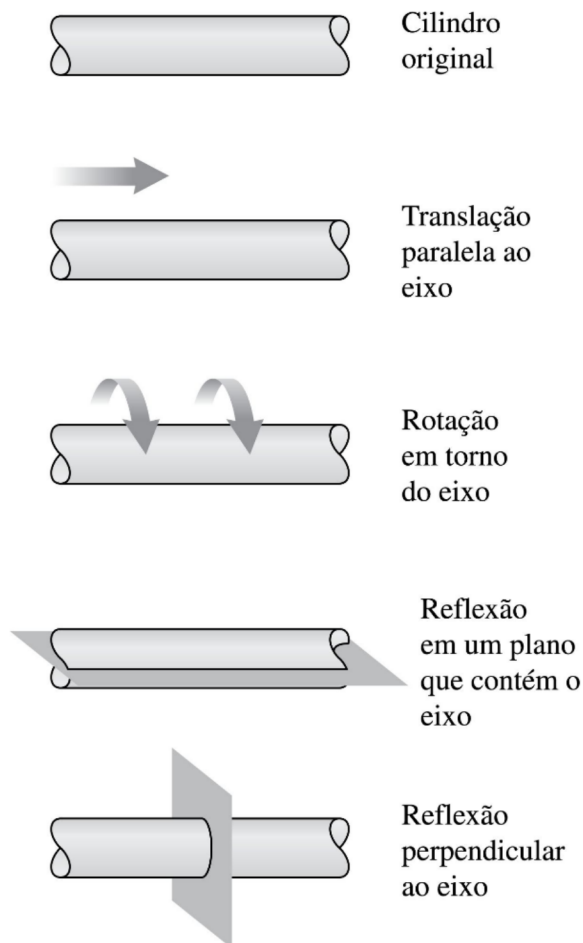
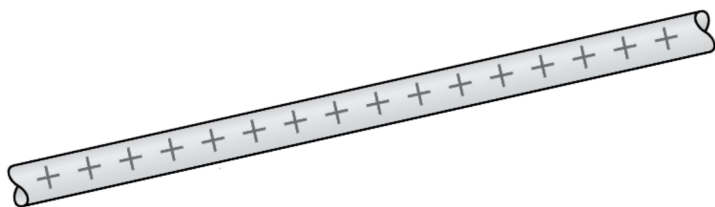


Uma distribuição de cargas é simétrica se existir um grupo de transformações geométricas que não cause nenhuma alteração física...

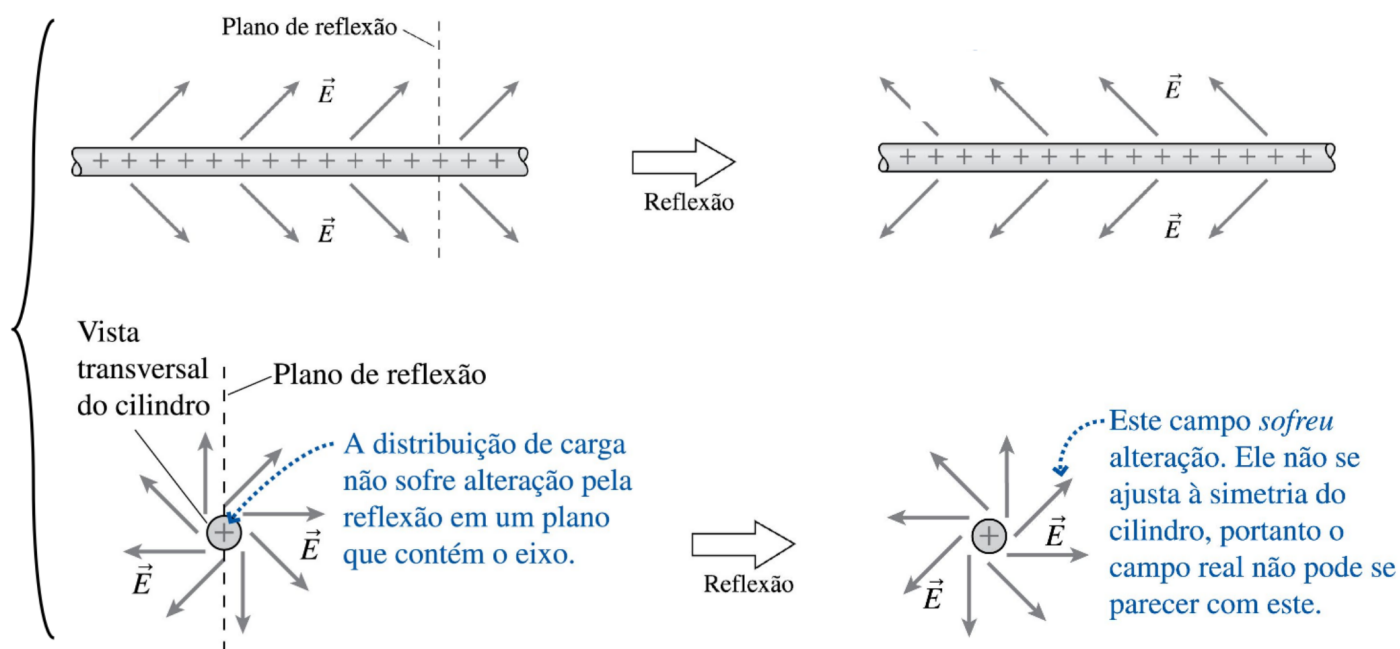


Uma distribuição de cargas é simétrica se existir um grupo de transformações geométricas que não cause nenhuma alteração física...

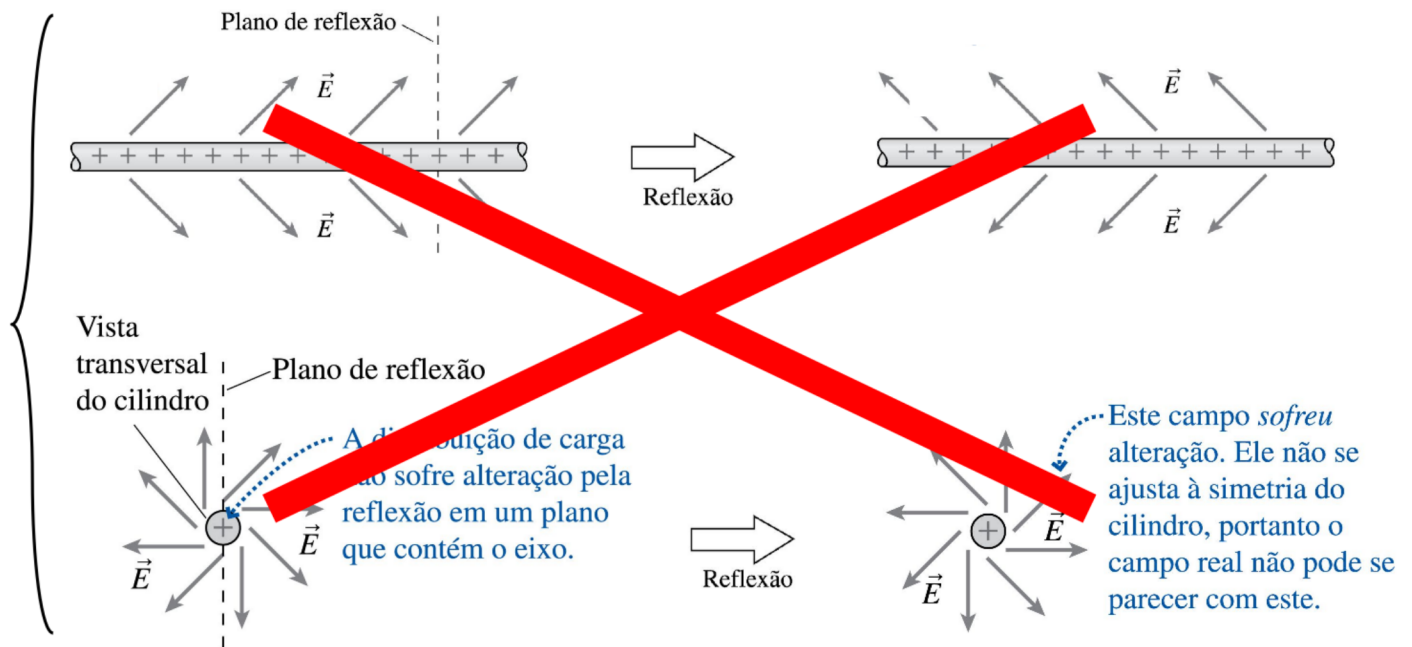
No caso geral, se a alteração (translação, p. ex.) não permitir concluir que nada mudou, então dizemos que a distribuição de cargas é simétrica frente àquela transformação particular.



Simetria na $\rho_{elétrica}$ $\longleftrightarrow$ Simetria no $\vec{E}$

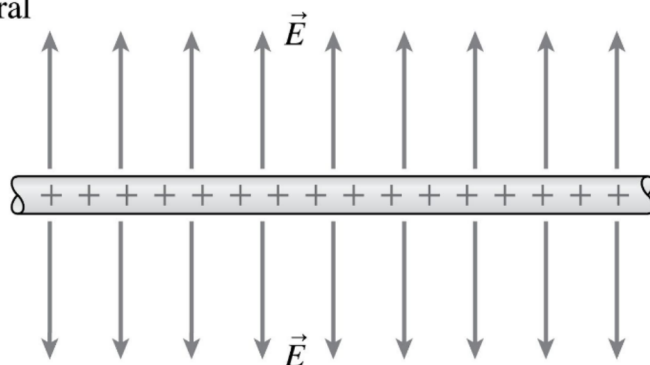


Simetria na $\rho_{elétrica}$ $\longleftrightarrow$ Simetria no $\vec{E}$

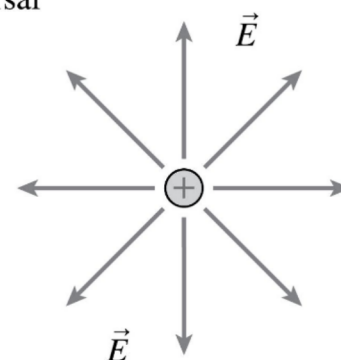


Simetria na $\rho_{elétrica}$ $\longleftrightarrow$ Simetria no $\vec{E}$

Vista lateral



Vista transversal

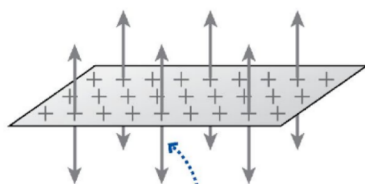


Nota: Os argumentos de simetria nos permitem concluir que o campo elétrico de um fio infinito tem simetria axial.

As três simetrias fundamentais

Simetria
Básica:

Simetria Planar



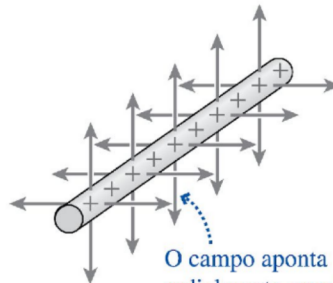
O campo é perpendicular ao plano.

Exemplo mais complexo:

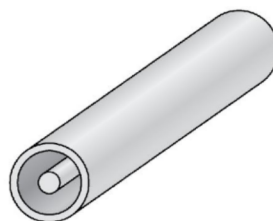


Capacitor de placas paralelas infinitas

Simetria cilíndrica

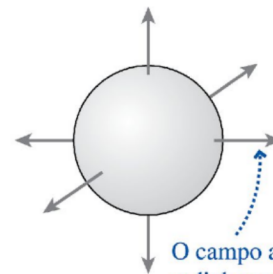


O campo aponta radialmente para fora ou para dentro do eixo.

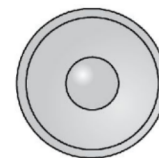


Cilindros coaxiais

Simetria Esférica



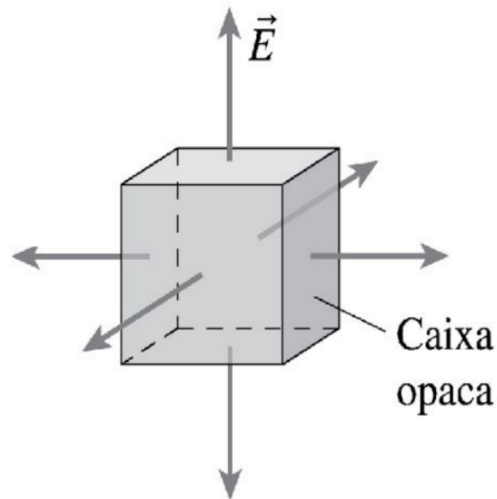
O campo aponta radialmente para fora ou para dentro do centro.



Esferas concêntricas

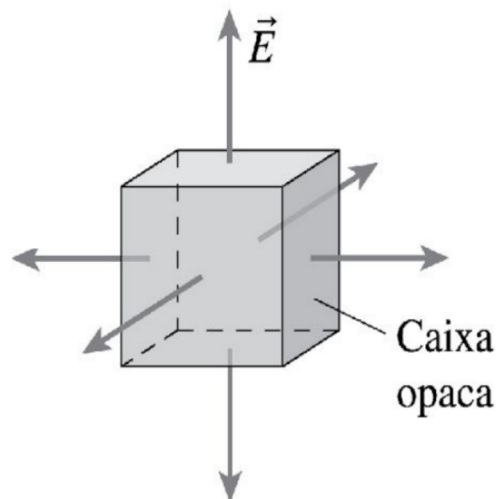
O conceito de Fluxo

É possível determinar o que há dentro das caixas dado $\vec{E}$?



O conceito de Fluxo

É possível determinar o que há dentro das caixas dado $\vec{E}$?

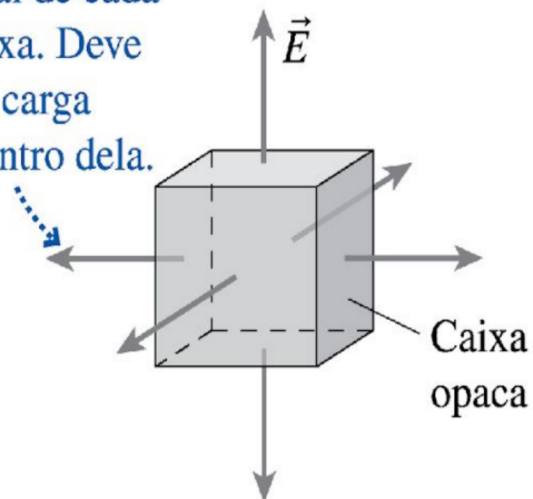


Resposta: Sim, pois como sabemos que o campo elétrico sai das cargas positivas e entra nas cargas negativas, concluímos que $\rho > 0$.

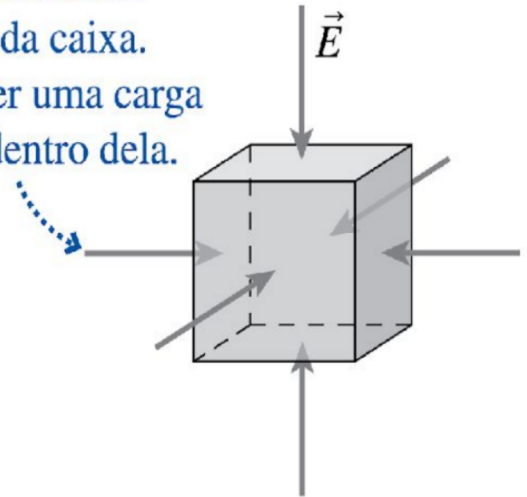
O conceito de Fluxo

O fluxo de campo através da superfície (sup. gaussiana) nos informa sobre a carga dentro da caixa...

O campo sai de cada face da caixa. Deve haver uma carga positiva dentro dela.



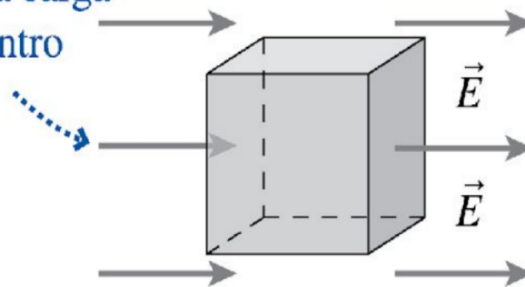
O campo entra em cada face da caixa. Deve haver uma carga negativa dentro dela.



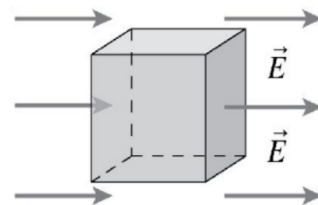
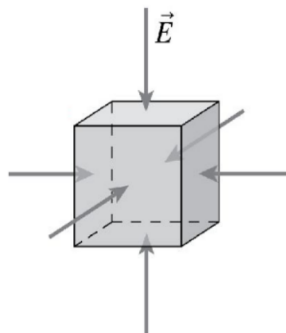
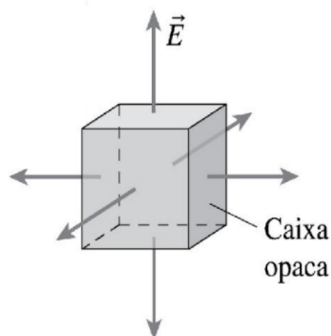
O conceito de Fluxo

O fluxo de campo através da superfície (sup. gaussiana) nos informa sobre a carga dentro da caixa...

Um campo que atravessa
toda caixa significa
que não há carga
líquida dentro
dela.



O conceito de Fluxo

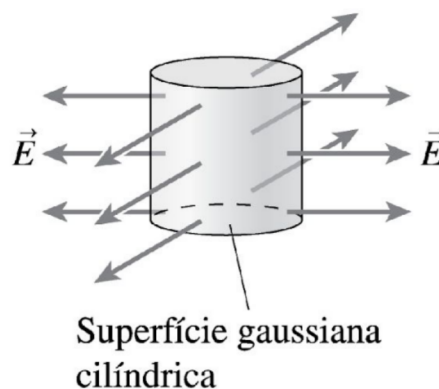
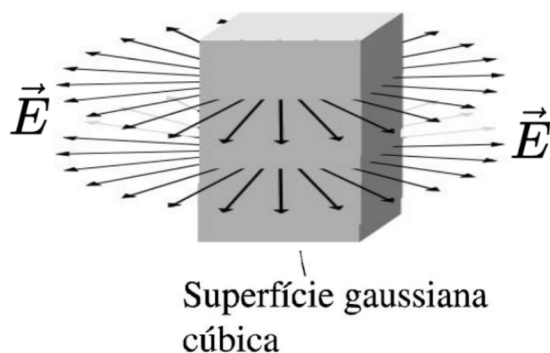


- Existe um fluxo para fora (dentro) através de uma superfície fechada em torno de uma carga líquida +(-)
- Não existe um fluxo resultante através de uma superfície fechada em torno de uma região na qual a carga líquida seja nula.

- A boa escolha da superfície gaussiana nos permite concluir o que há no interior do volume que é limitado pela superfície gaussiana...

Teste conceitual

Uma dada distribuição de cargas é envolvida por duas superfícies gaussianas. Ora uma caixa, ora um cilindro.



O que podemos dizer sobre essa distribuição? Ela é

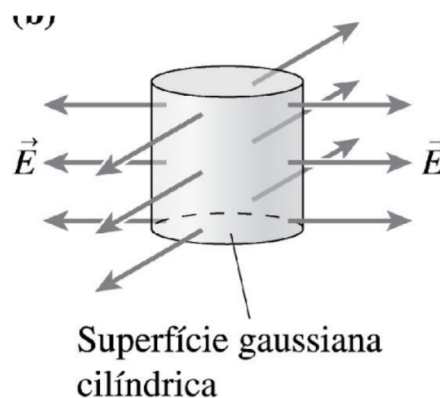
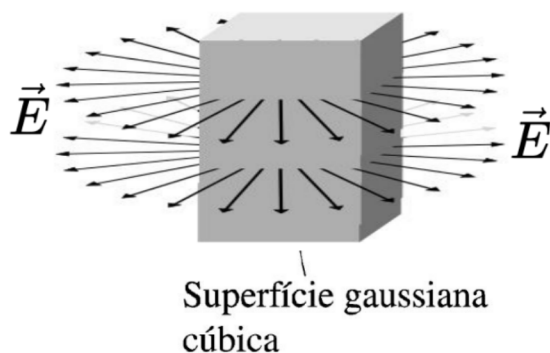
- A) uma carga pontual positiva
- C) um fio infinito carregado +

- B) uma esferinha +
- D) um plano infinito carregado +

- A boa escolha da superfície gaussiana nos permite concluir o que há no interior do volume que é limitado pela superfície gaussiana...

Teste conceitual

Uma dada distribuição de cargas é envolvida por duas superfícies gaussianas. Ora uma caixa, ora por um cilindro.



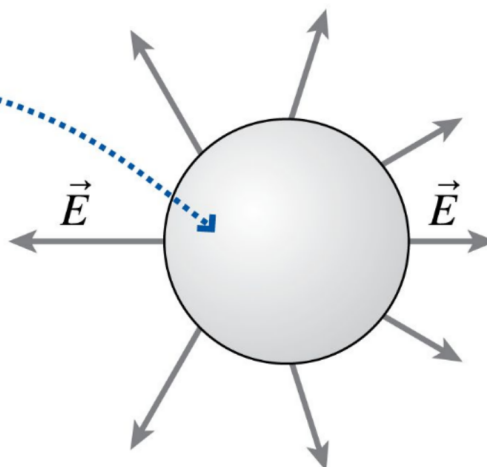
O que podemos dizer sobre essa distribuição? Ela é

- A) uma carga pontual positiva
- C) um fio infinito carregado +

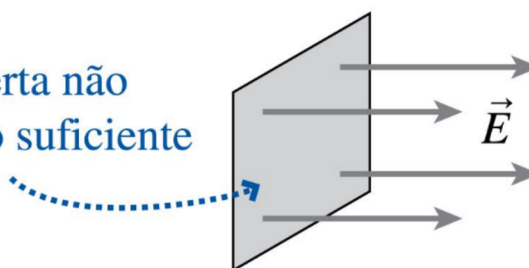
- B) uma esferinha +
- D) um plano infinito carregado +

● O que pode ocorrer qdo não escolhemos uma boa superfície gaussiana.

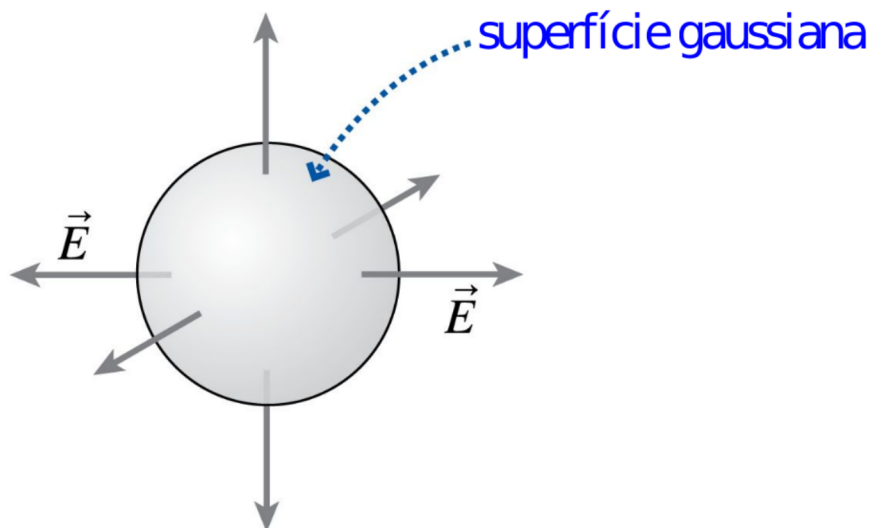
Uma superfície gaussiana que não se ajuste à simetria do campo elétrico não é muito útil.



Uma superfície aberta não fornece informação suficiente sobre a carga.



Escolhemos uma esfera (centrada na origem) como superfície gaussiana para uma carga pontual na origem.



Neste caso,

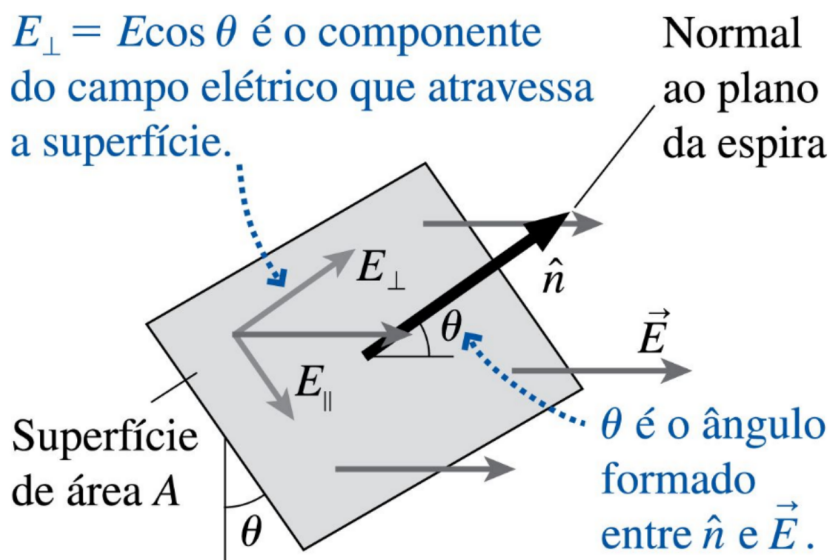
- $\vec{E}$ é perpendicular à superfície gaussiana
- $|\vec{E}|$ é constante ao longo da superfície gaussiana

● Cálculo do fluxo de campo elétrico

O fluxo elétrico é uma quantidade de campo elétrico que atravessa uma área A .

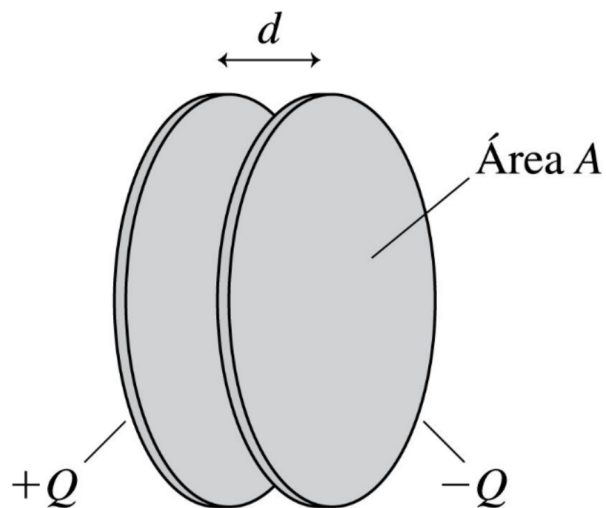
Matematicamente, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\Phi_e &\equiv \vec{E} \cdot \vec{A} \\ &= E_{\perp} A \\ &= EA \cos \theta\end{aligned}$$



Ver exemplo resolvido 28.1

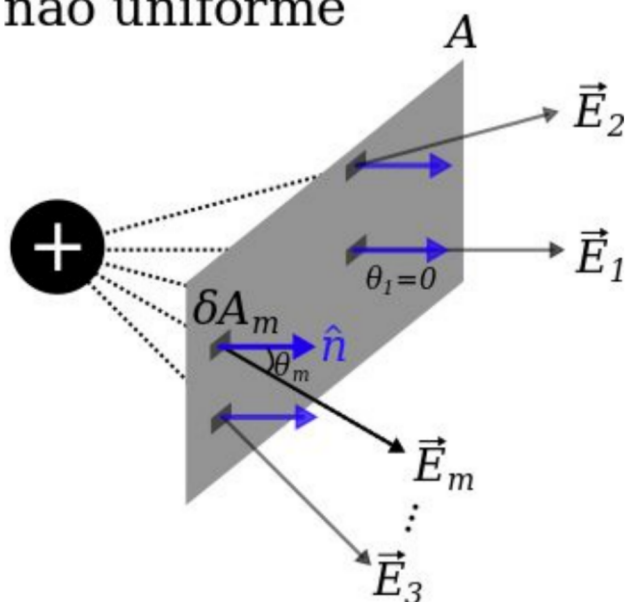
Fluxo elétrico dentro de um capacitor de placas paralelas



$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

$$E = \frac{\eta}{\epsilon_0} \frac{Q}{A_{placas}}$$

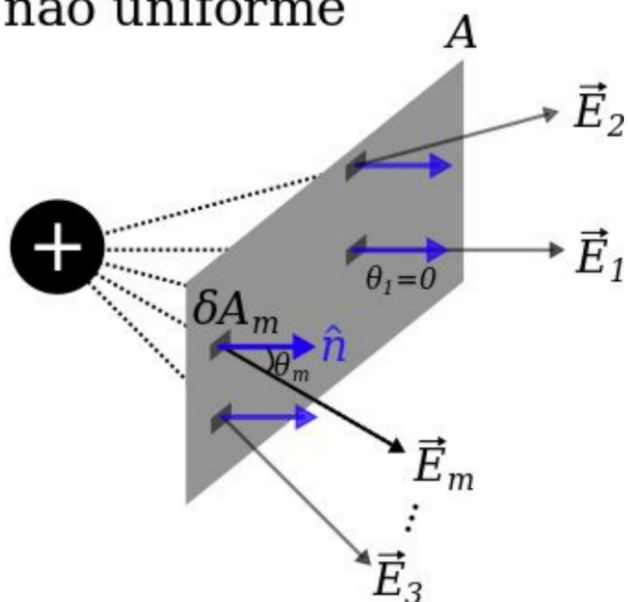
Campo Elétrico não uniforme



O fluxo elétrico sobre uma superfície pode ser calculado como a soma dos fluxos através de pequenos pedaços da superfície.

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \delta\Phi_1 + \delta\Phi_2 + \cdots \delta\Phi_m \\ &= \sum_{i=1}^m \delta\Phi_i \\ &= \sum_{i=1}^m \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i\end{aligned}$$

Campo Elétrico não uniforme



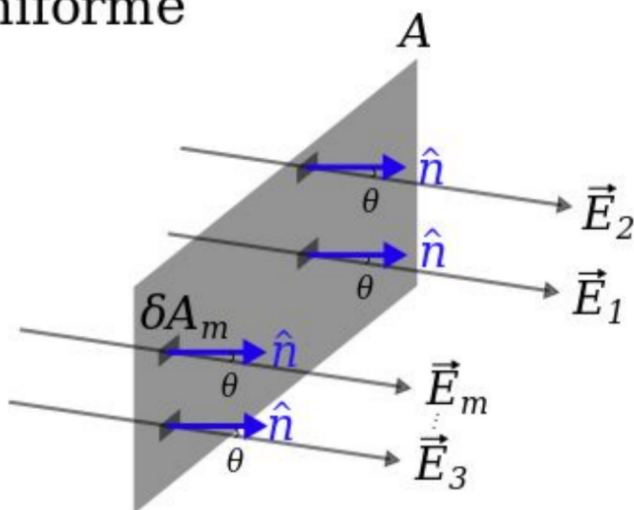
O fluxo elétrico sobre uma superfície pode ser calculado como a soma dos fluxos através de pequenos pedaços da superfície.

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \delta\Phi_1 + \delta\Phi_2 + \dots + \delta\Phi_m \\ &= \sum_{i=1}^m \delta\Phi_i \\ &= \sum_{i=1}^m \vec{E}_i \cdot \delta\vec{A}_i\end{aligned}$$

Fazendo $\delta\vec{A} \rightarrow d\vec{A}$

$$\Phi_e = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Campo Elétrico uniforme*



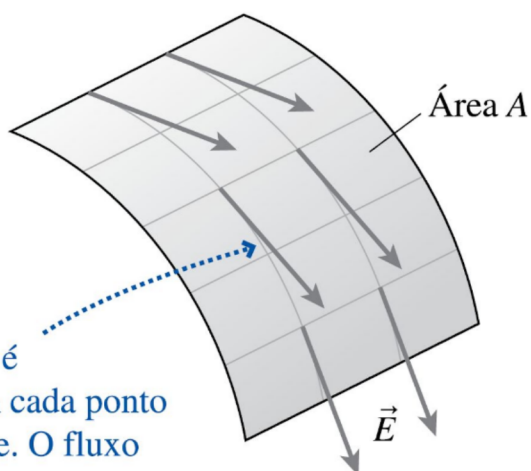
$$\begin{aligned}\Phi_e &= \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{sup} E \cos \theta dA \\ &= E \cos \theta \int_{sup} dA \\ &= E \cos \theta A\end{aligned}$$

* sup. gaussiana plana

Fluxo através de uma superfície curva: dois casos especiais

$$\vec{E} \parallel \text{superfície}$$

(a)

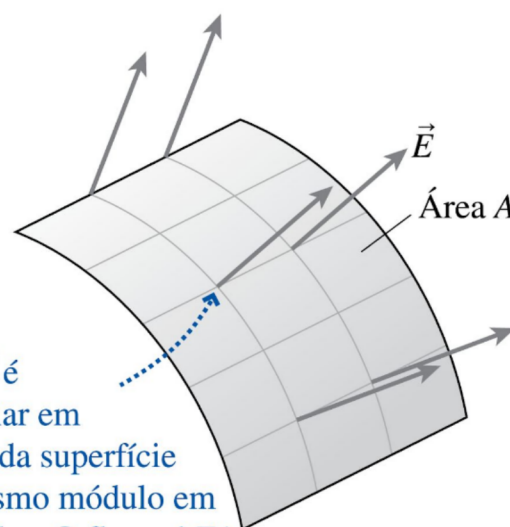


O campo $\vec{E}$ é tangente em cada ponto da superfície. O fluxo é nulo.

$$\Phi_e = 0$$

$$\vec{E} \perp \text{superfície}$$

(b)



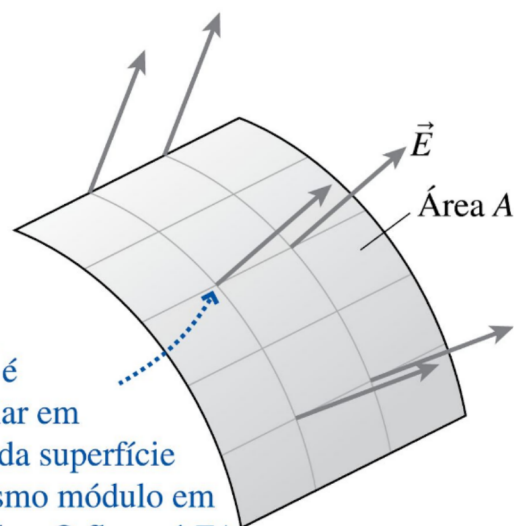
O campo $\vec{E}$ é perpendicular em cada ponto da superfície e tem o mesmo módulo em cada um deles. O fluxo é EA .

Fluxo através de uma superfície curva: dois casos especiais

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{sup} E \cos 0 dA \\ &= E \int_{sup} dA \\ &= EA\end{aligned}$$

$$\vec{E} \perp \text{superfície}$$

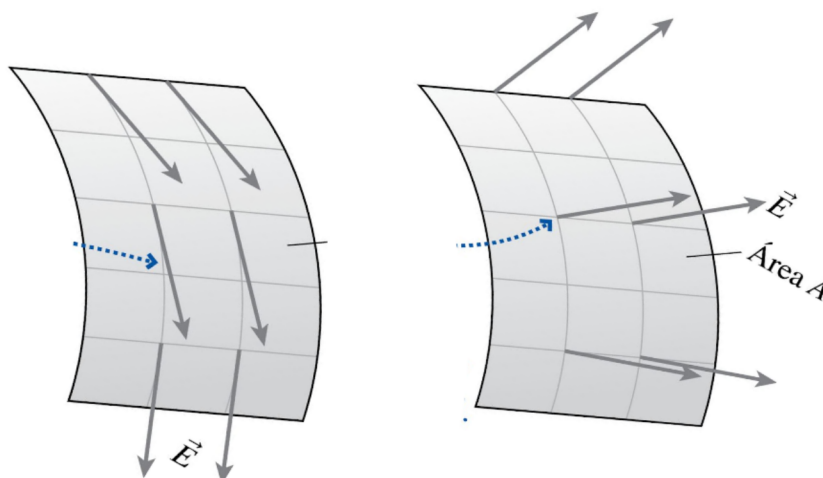
(b)



O campo $\vec{E}$ é perpendicular em cada ponto da superfície e tem o mesmo módulo em cada um deles. O fluxo é EA .

O fato de o módulo do campo elétrico ser cte em toda a superfície nos permitiu sacar para fora da integral o valor cte de E ...

Fluxo através de uma superfície curva: dois casos especiais



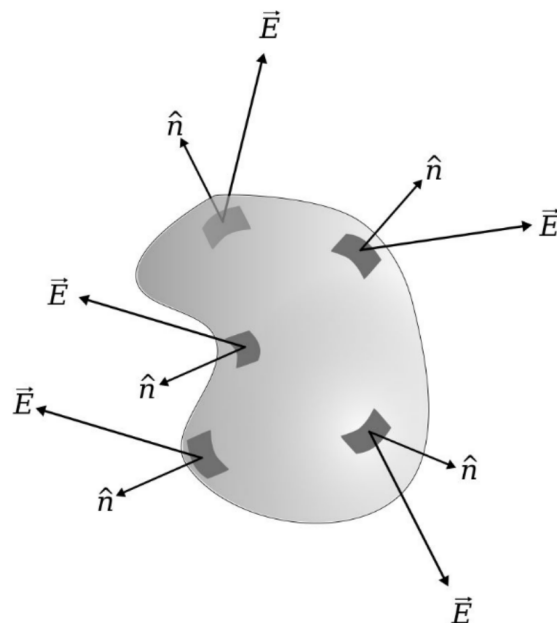
Em resumo:

- Se o campo elétrico for tangente a uma superfície em todos os pontos da mesma, o fluxo elétrico através da superfície será $\Phi_e = 0$.
- Se o campo elétrico for perpendicular a uma superfície em qualquer ponto da mesma e tiver mesmo módulo em qualquer ponto, o fluxo através da superfície será $\Phi_e = EA$.

Fluxo através de uma superfície fechada

Em se tratando de uma superfície fechada, a notação matemática do fluxo muda um pouco...

$$\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



Nota ► Toda sup. fechada possui um lado interior e um lado exterior. O vetor $d\vec{A}$ sempre aponta para fora da superfície. Isso remove uma ambiguidade que estava presente quando tratamos de sup aberta.

● Teste conceitual 2

Um retângulo de área A situa-se no plano xz . Quanto valerá Φ_e se

$$\vec{E} = (E_{0x} \hat{i} + E_{0y} \hat{k})$$

A) 0

B) $E_{0x}A$

C) $E_{0y}A$

D) $(E_{0x} + E_{0y})A$

● Teste conceitual 2

Um retângulo de área A situa-se no plano xz . Quanto valerá Φ_e se

$$\vec{E} = (E_{0x} \hat{i} + E_{0y} \hat{k})$$

A) 0

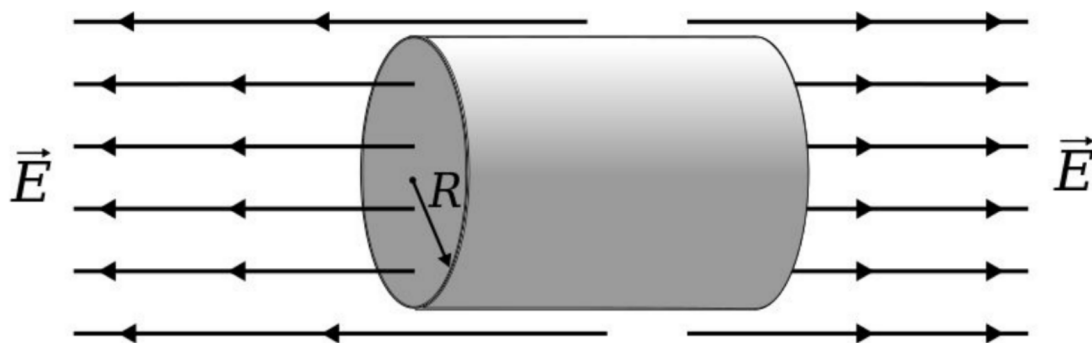
B) $E_{0x}A$

C) $E_{0y}A$

D) $(E_{0x} + E_{0y})A$

● Teste conceitual 3

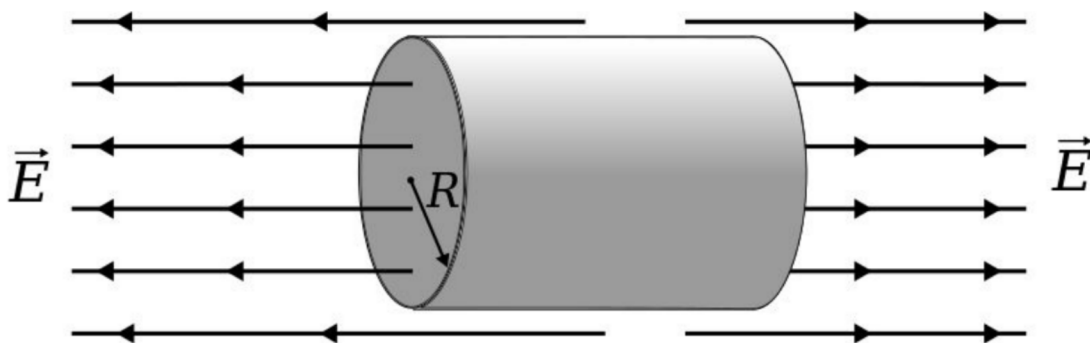
Quanto vale o fluxo elétrico resultante através do cilindro abaixo?



- A) 0
- B) $E\pi R^2$
- C) $E2\pi R$
- D) $E2\pi R^2$

Teste conceitual 3

Quanto vale o fluxo elétrico resultante através do cilindro abaixo?



- A) 0
- B) $E\pi R^2$
- C) $E2\pi R$
- D) $E2\pi R^2$

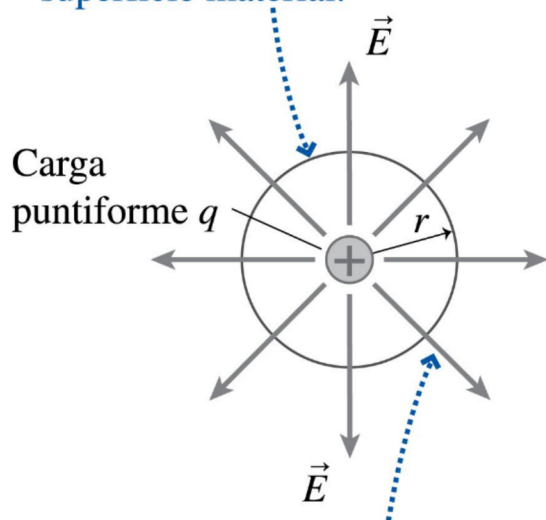
● Motivos para estudar a Lei de Gauss

- Permite calcular o campo elétrico em distribuições simétricas com grande facilidade.
- Permite o cálculo de campo elétrico qdo a distribuição de cargas está em movimento, o que a Lei de Coulomb não permite*.

*Em casos em que $v \ll c$, podemos utilizar a Lei de Coulomb para calcular o campo elétrico.

● Campo de uma carga pontual

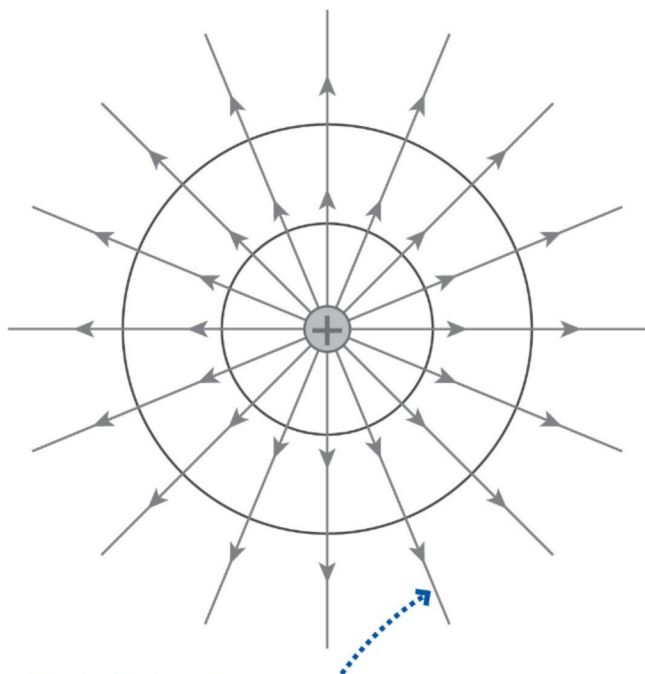
Secção transversal de uma esfera gaussiana de raio r . Trata-se de uma superfície matemática, e não, de uma superfície material.



O campo elétrico é perpendicular à superfície e tem o mesmo módulo em qualquer ponto da mesma.

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_e &= \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{sup} E \cos 0^\circ dA \\ &= E \cos 0^\circ A_{esfera} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 \\ &= q/\epsilon_0 \end{aligned} \right.$$

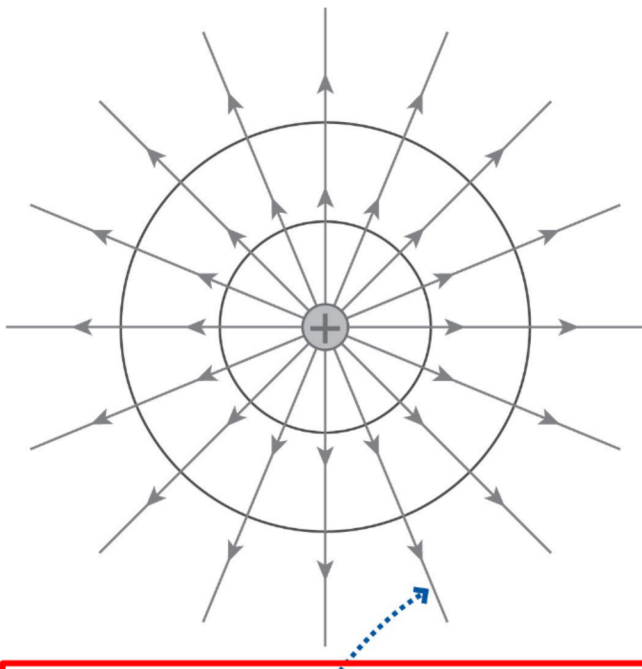
● O resultado anterior não depende de r...



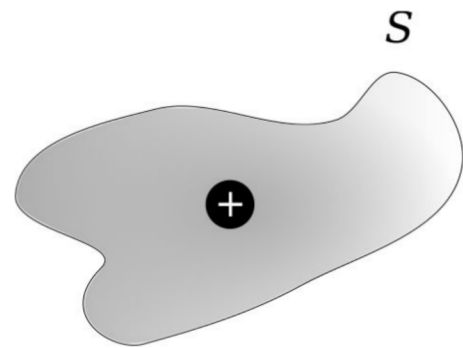
$$\Phi_e = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon_0$$

Toda linha de campo que atravessa uma pequena esfera também passará através de uma esfera grande. Aqui, o fluxo através das duas esferas é o mesmo.

● O resultado anterior não depende de r...



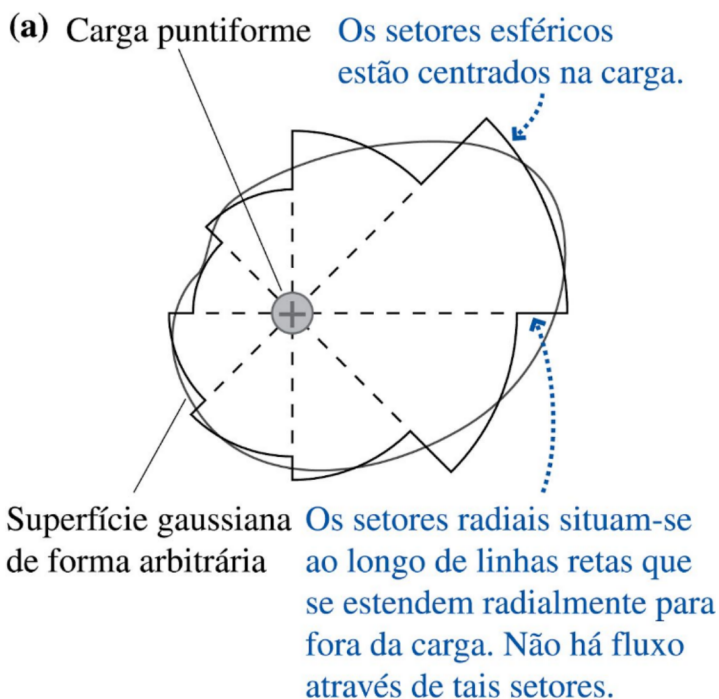
Toda linha de campo que atravessa uma pequena esfera também passará através de uma esfera grande. Aqui, o fluxo através das duas esferas é o mesmo.



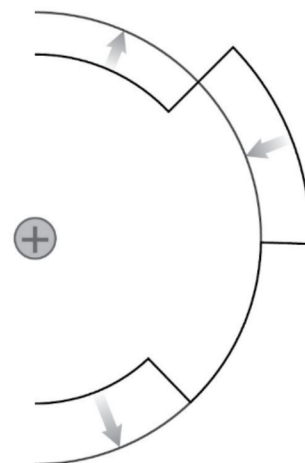
$$\Phi_e = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon_0$$

Esse resultado independe da forma da superfície

O Fluxo é independente de S



(b)

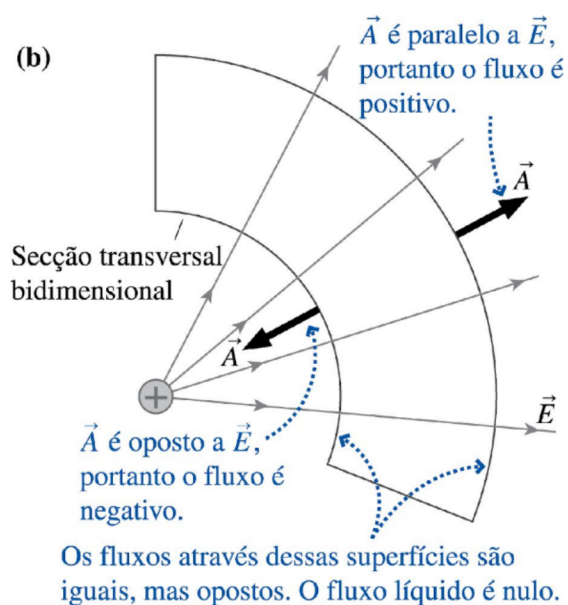
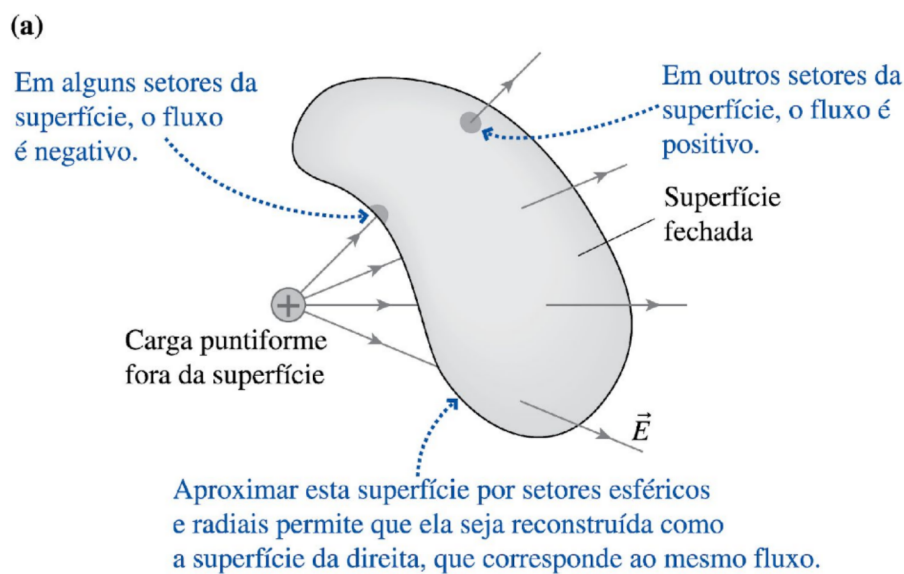


Os setores esféricos podem ser deslocados para dentro ou para fora a fim de formar uma esfera completa. Assim, o fluxo através de todos os setores é igual ao fluxo através de uma esfera completa.

$$\Phi_e = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon_0$$

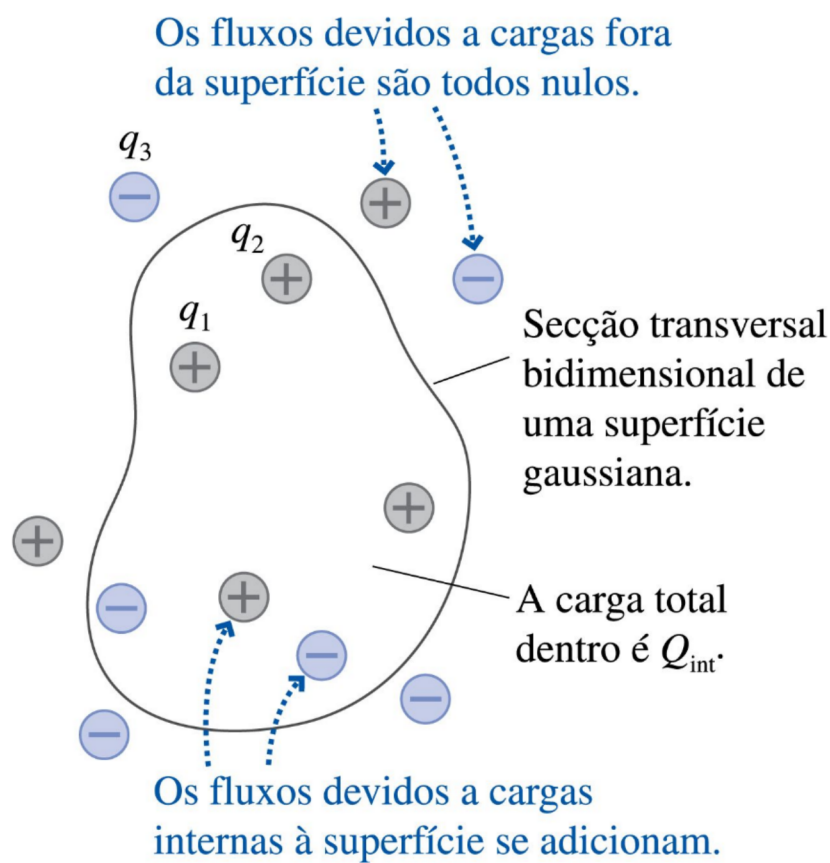
A aproximação por setores radiais e esféricos pode ser tão boa quanto se deseje, desde que os setores sejam suficientemente pequenos.

Carga fora da superfície S



$$\Phi_e = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Cargas Múltiplas

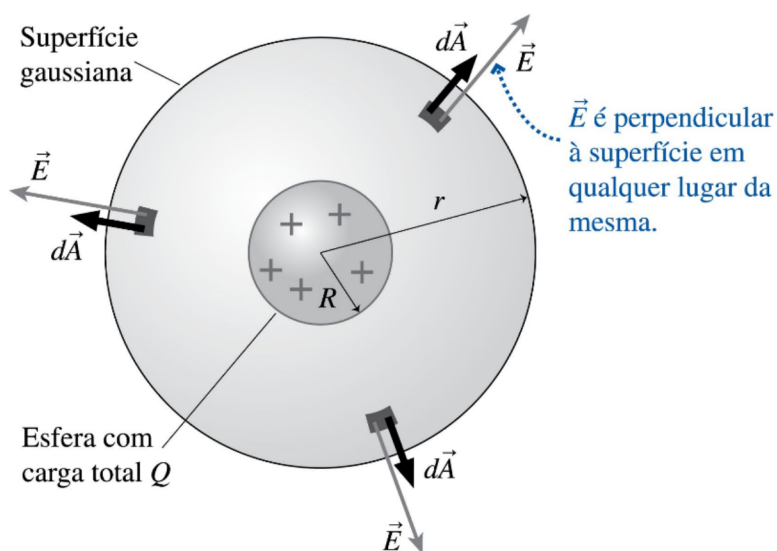


Usando a Lei de Gauss...

Dois problemas importantes

Ex.: 28.3 e 28.4

O campo elétrico fora de uma esfera carregada é igual ao de uma carga.



$$\Phi_e = \int_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$EA_{esfera} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

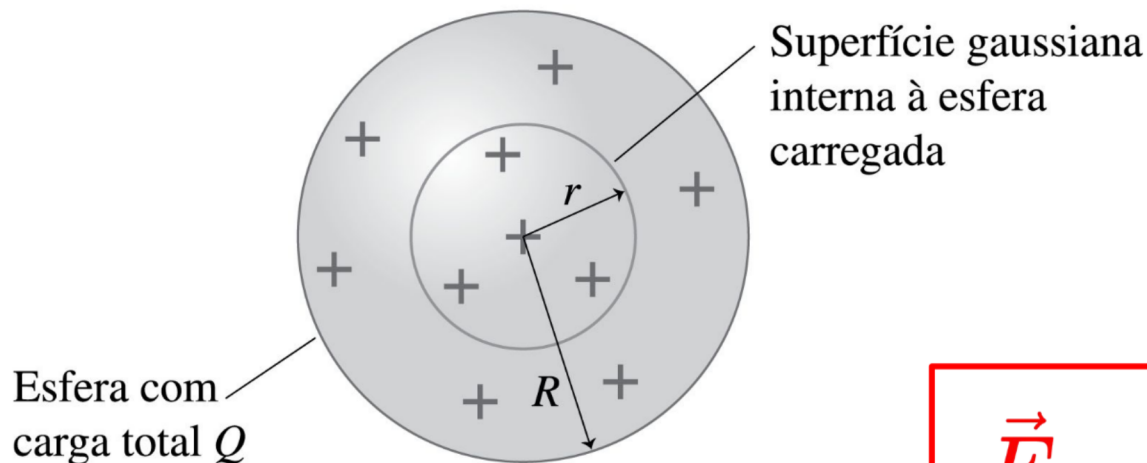
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

● Usando a Lei de Gauss...

Dois problemas importantes

Ex.: 28.3 e 28.4

O campo elétrico dentro de uma esfera carregada uniformemente é linear.



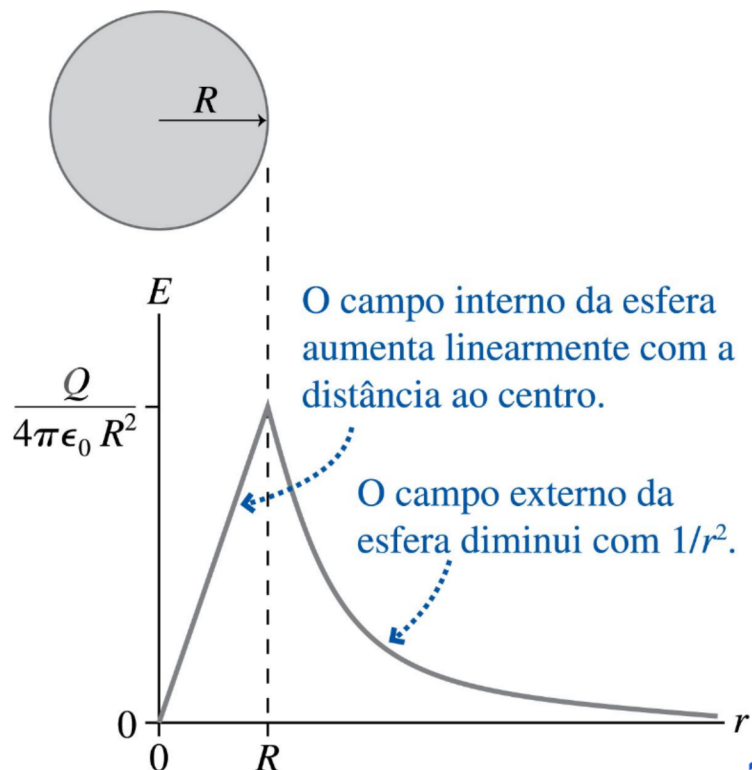
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \hat{r}$$

Usando a Lei de Gauss...

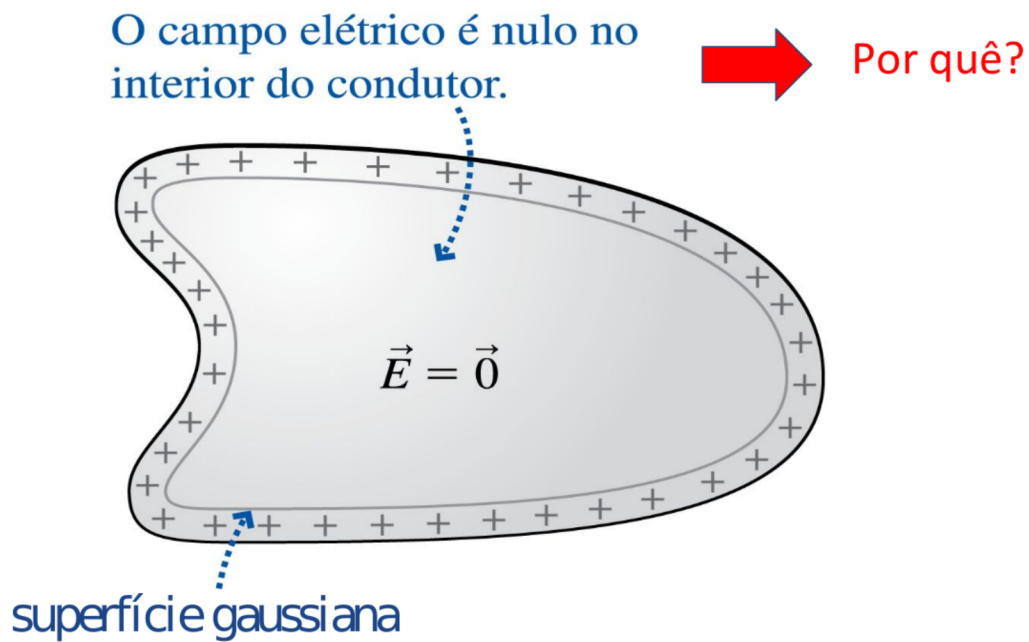
Dois problemas importantes

Ex.: 28.3 e 28.4

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \hat{r} & r \in [0, R] \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r \in]R, \infty[\end{cases}$$

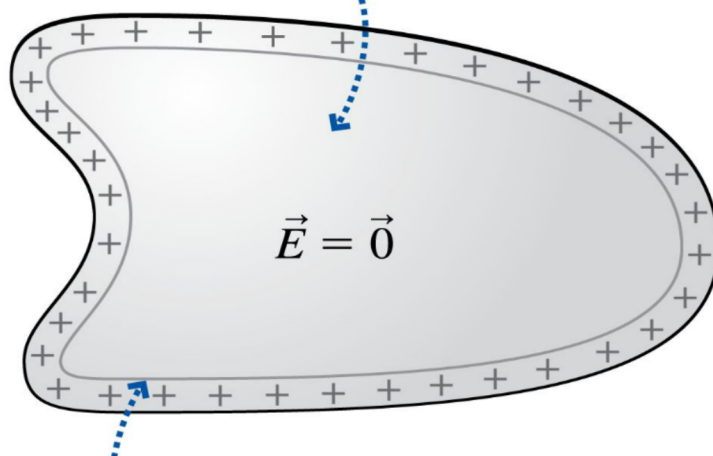


Condutores em equilíbrio eletrostático...



Condutores em equilíbrio eletrostático...

O campo elétrico é nulo no interior do condutor.



Caso contrário, haveria corrente elétrica indicando que o condutor não está em equilíbrio.

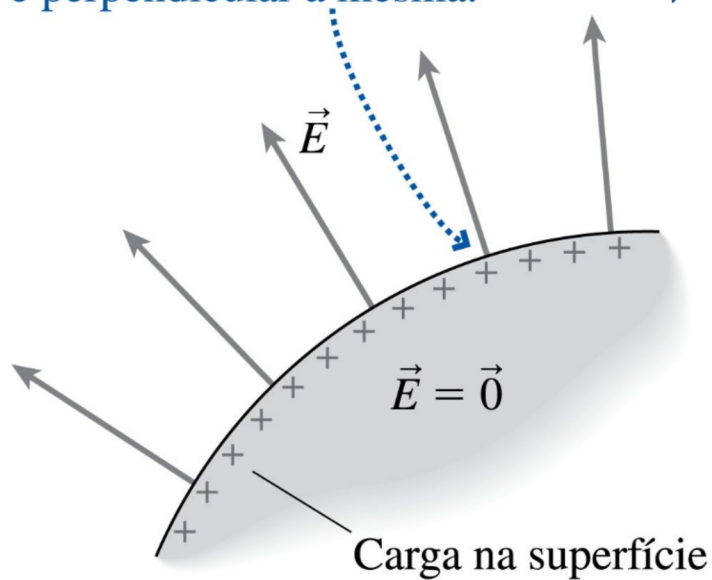
O fluxo através da superfície gaussiana é nulo. Não há carga líquida no interior do condutor. Portanto, todo o excesso de carga está na superfície.

Condutores em equilíbrio eletrostático...

O campo elétrico na superfície
é perpendicular à mesma.



Por quê?



● Condutores em equilíbrio eletrostático...

● Campo elétrico na superfície do metal

