

Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais

Ralph Teixeira, Heloísa Medeiros, Maria Lúcia Menezes

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

E-mail address: `ralph@mat.uff.br`

URL: `http://moodle.neami.uff.br`

ABSTRACT.

Contents

Prefácio	v
Chapter 1. Motivação: a Equação do Calor	1
1. Exercícios	3
Chapter 2. Funções Periódicas	5
1. Exercícios	6
Chapter 3. Breve Revisão de Álgebra Linear	7
1. Exercícios	10
Chapter 4. Séries de Fourier	11
1. Exercícios	14
Chapter 5. Extensões Pares e Ímpares	17
1. Exercícios	20
Chapter 6. A Identidade de Parseval	21
1. Exercícios	23
Chapter 7. Derivação e Integração de Séries de Fourier	25
1. Exercícios	29
Chapter 8. Convergência Pontual e Uniforme	31
1. Exercícios	35
Chapter 9. Forma Complexa da Série de Fourier	37
1. Exercícios	41
Chapter 10. O Fenômeno de Gibbs	43
1. Exercícios	44
Chapter 11. Método da Separação de Variáveis	45
1. Exercícios	48
Chapter 12. A Equação da Onda (Primeira Ordem)	51
1. Exercícios	52
Chapter 13. A Equação da Onda (Segunda Ordem)	55
1. Soluções Fracas	56
2. Exercícios	58
Chapter 14. A Regra do Paralelogramo e a Corda Finita	61
1. Exercícios	63
Chapter 15. Redução ao Caso Homogêneo	65
1. Exercícios	67
Chapter 16. A Equação de Laplace	69
1. Exercícios	72
Chapter 17. A Função Gama e as Funções de Bessel	75
1. A Função Gama	75
2. Funções de Bessel	76
3. Exercícios	80

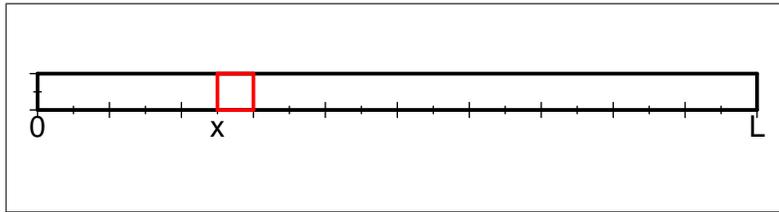
Chapter 18. Séries de Fourier-Bessel	83
1. Exercícios	85
Chapter 19. Funções de Legendre	87
1. Séries de Fourier-Legendre	89
2. Exercícios	91

Prefácio

Estas são as notas de aula da disciplina Métodos Matemáticos VII. Considere esta resumo como **material de apoio, em fase de construção**. Por favor, não hesite em discutir erros e exercícios no site da disciplina.

Motivação: a Equação do Calor

Considere uma barra de comprimento L isolada termicamente do meio ambiente, exceto nas suas pontas, que são mantidas a temperatura constante (digamos que elas estão mergulhadas em água com gelo; assim, a temperatura ali é sempre 0). Sabendo uma distribuição inicial de temperatura na barra, gostaríamos de calcular como a temperatura da barra varia com o tempo.

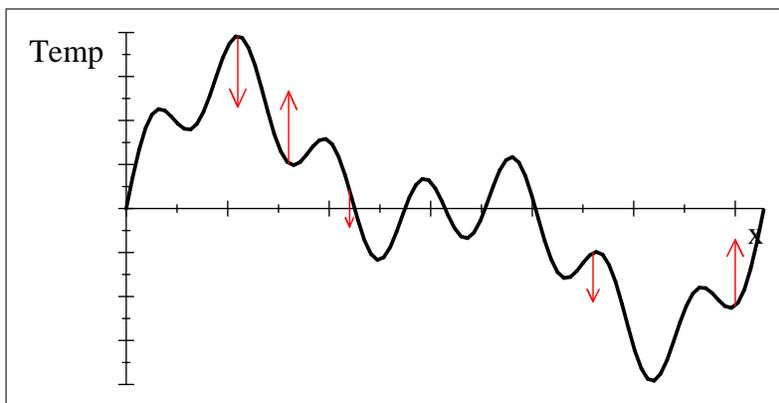


Façamos um modelo matemático desta situação: seja $u(x, t)$ a temperatura da barra no ponto $x \in [0, L]$ no tempo $t \in [0, \infty)$. A distribuição inicial de temperatura seria uma função $f(x) = u(x, 0)$. O fato das pontas estarem mergulhadas em gelo se traduz pela expressão $u(0, t) = u(L, t) = 0$ para qualquer tempo t . Falta apenas saber qual o processo de difusão de calor no interior da barra. Um modelo para este processo é dado pela Equação Diferencial Parcial (EDP)

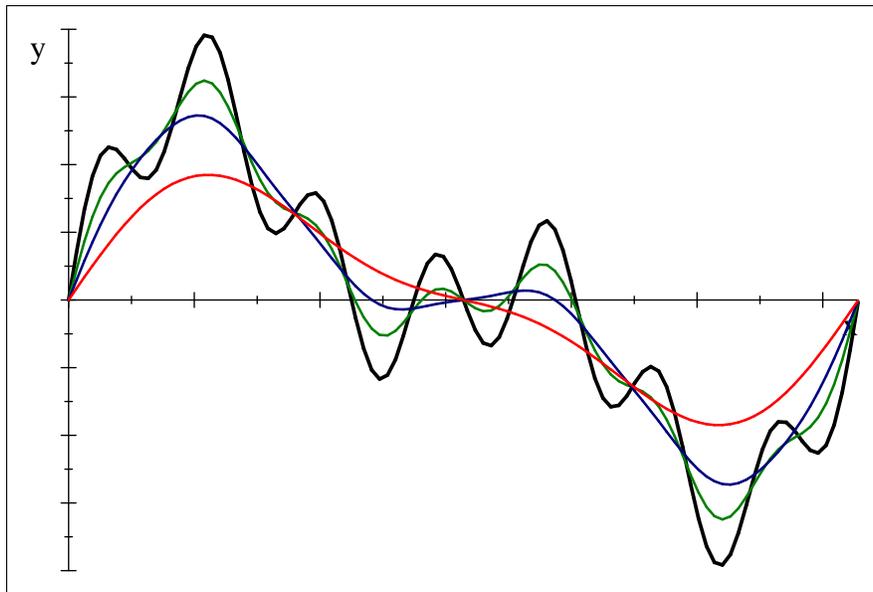
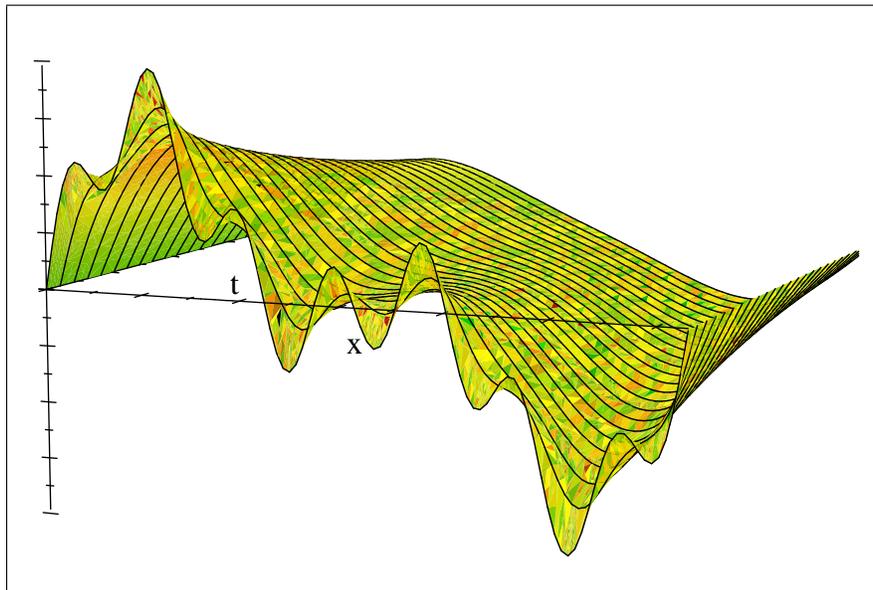
$$u_t = K u_{xx}$$

Uma dedução desta equação será dada mais tarde no capítulo sobre a equação do calor. Neste momento, não se preocupe tanto sobre *onde ela vem*, mas é essencial que você entenda o que esta equação *significa*. Para tanto, acompanhe o exemplo a seguir.

Fixe um tempo T e considere a temperatura da barra $g(x) = u(x, T)$ neste instante. Suponha que esta distribuição seja dada pelo gráfico abaixo



(ou seja, a barra inicialmente está em geral mais quente à esquerda, mais fria à direita, mas a temperatura oscila bastante de um ponto a outro). De acordo com a EDP acima, quanto mais côncavo para cima for o gráfico de $g(x)$ (isto é, quanto maior for $g''(x) = u_{xx}(x, T)$), maior será a velocidade com que o gráfico de $g(x)$ subirá (isto é, maior será $u_t(x, T)$). Em particular, pontos quentes cercados de pontos frios esfriam, e vice-versa, o que combina com a nossa intuição sobre a condução de calor. As setas acima indicam este efeito de suavização da temperatura original, e os gráficos abaixo indicam a evolução da temperatura para vários valores de t :

Evolução nos tempos $t = 0$, $t = 2$, $t = 4$ e $t = 25$.Gráfico de $u(x, t)$

EXERCISE 1. Tente adivinhar informalmente uma solução da equação do calor $u_t = u_{xx}$ com condições de contorno $u(0, t) = u(2\pi, t) = 0$ para as condições iniciais abaixo.

a) $u(x, 0) = \sin x$;

b) $u(x, 0) = \sin 2x$;

c) $u(x, 0) = 3 \sin x + 4 \sin 5x$;

d) $u(x, 0) = 4 \sin x + 3.1 \sin 2x + 1.8 \sin 7x$.

Solução: a) Note que quando $u(x, 0) = \sin x$, tem-se $u_{xx}(x, 0) = -\sin x$. Ou seja, inicialmente, temos $u_t = -u$. Você conhece alguma função que, quando derivada com relação a t , troca de sinal? Bom, teríamos e^{-t} . Um pouco de criatividade leva então a tentar

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x$$

Verifique que, de fato, isto é uma solução da equação do calor com as condições dadas: o "-1" que cai da derivação com relação a t é idêntico ao "-1" que sai das duas derivadas do seno!

b) Derivar $\sin 2x$ com relação a x duas vezes faz a função ser multiplicada por -4 . Para que este termo também apareça na derivada com relação a t , basta fazer

$$u(x, t) = e^{-4t} \sin 2x$$

Verifique que esta solução realmente satisfaz as condições dadas.

c) Use um pouco de criatividade e note que a resposta é

$$u(x, t) = 3e^{-t} \sin x + 4e^{-25t} \sin 5x$$

d) A esta altura do campeonato, esperamos que você tenha notado que qualquer combinação linear de funções do tipo

$$u_m(x, t) = e^{-m^2 t} \sin(mx)$$

satisfaz $u_t = u_{xx}$ e também $u(0, t) = u(2\pi, t) = 0$ para todo t . Basta agora "ajeitar" a combinação linear para que $u(x, 0)$ seja a função dada. Neste caso, por exemplo, uma solução é

$$u(x, t) = 4e^{-t} \sin x + 3.1e^{-4t} \sin 2x + 1.8e^{-49t} \sin 7x$$

Para o leitor curioso, esta foi a fórmula que gerou os gráficos acima.

Em outras palavras, sempre que a condição inicial $u(x, 0)$ puder ser escrita como combinação linear de senos, é fácil encontrar uma solução da EDP do calor multiplicando cada seno (em x) pela exponencial correta em t , isto é, trocando cada termo da forma $\sin mx$ pelo termo $e^{-m^2 t} \sin mx$.

O "esboço de teoria" acima foi feito de maneira bastante informal e levanta várias questões importantes:

i) O que há de tão especial a respeito de senos para resolver a equação do calor?

Resposta parcial: os senos são "autofunções" da Equação do Calor com condições de contorno como as do exemplo acima. O conceito de autofunções pode ser estendido para outras Equações que podem então ser resolvidas como acima, como veremos mais tarde.

ii) E se a condição inicial não estiver escrita como uma combinação linear de senos? Será possível escrever qualquer função $f(x) = u(x, 0)$ como uma combinação linear de funções trigonométricas? Como encontrar os coeficientes corretos?

Resposta parcial: se $f(x)$ for periódica e contínua em seu domínio, então ela pode ser bem aproximada por uma combinação linear de funções trigonométricas. Este tópico é o que perseguiremos nas próximas aulas.

Então vamos destacar desde já a questão fundamental desta parte do curso: dada uma função $f(x)$, é possível escrevê-la como uma soma (talvez "infinita") de senos e cossenos, possivelmente mais uma constante? Ou seja, será que é possível escrever¹

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)) ?$$

e, em caso positivo, como encontrar os a_m e b_m a partir de $f(x)$?

1. Exercícios

1) Adivinhe uma solução da equação do calor

$$\begin{aligned} u_t &= c \cdot u_{xx} \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \text{ para todo } t > 0 \\ u(x, 0) &= 5 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{ para } x \in [0, L] \end{aligned}$$

Resposta: $u(x, t) = 5e^{-c\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

2) Adivinhe uma solução da equação do calor

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ para todo } t > 0 \\ u(x, 0) &= 4 \sin^3 x \text{ para } x \in [0, \pi] \end{aligned}$$

[Dica: transforme $\sin^3 x$ em uma soma de senos da forma $\sin mx$.]

Resposta: $u(x, t) = 3e^{-t} \sin x - e^{-9t} \sin 3x$

3) Em geral, encontre uma solução para

$$\begin{aligned} u_t &= C u_{xx} \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= \sum_{m=1}^N c_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

Resposta: $u(x, t) = \sum_{m=1}^N c_m \exp\left(\frac{-Cm^2\pi^2 t}{L^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$

¹A constante a_0 aparece "dividida por 2" apenas para facilitar alguns cálculos que aparecerão mais tarde.

4) Adivinhe uma solução da equação da onda

$$\begin{aligned}u_{tt} &= 9u_{xx} \\u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ para todo } t > 0 \\u(x, 0) &= 7 \sin x \text{ para } x \in [0, \pi]\end{aligned}$$

Resposta: $u(x, t) = 7 \cos 3t \sin x$.

Funções Periódicas

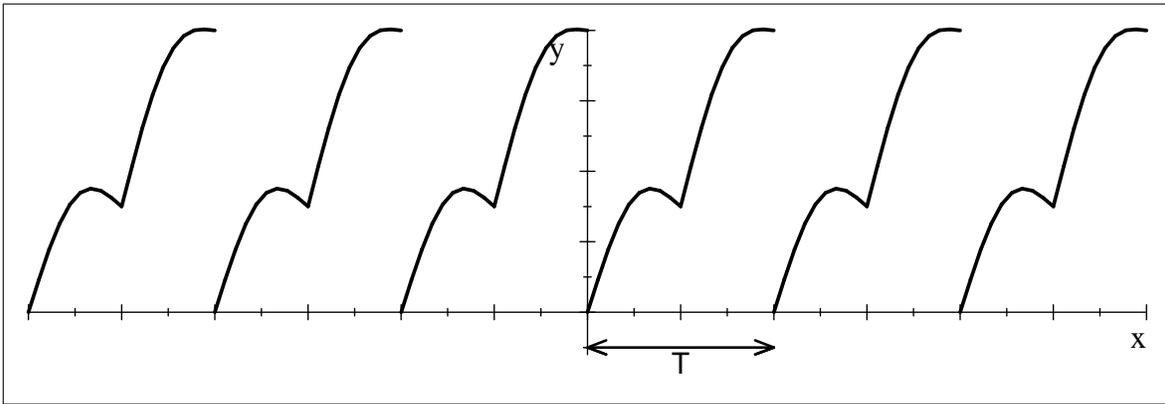
O problema fundamental desta parte do curso é escrever uma função $f(x)$ como uma "soma" de senos e cossenos

$$(0.1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

Antes de fazer isto, queremos examinar algumas propriedades simples destas funções trigonométricas.

DEFINIÇÃO 1. Uma função $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **periódica de período** $T \neq 0$ se $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Graficamente, uma função $f(x)$ é periódica se seu gráfico "se repete de T em T unidades" na direção x .



EXEMPLO 1. As funções $\sin x$ e $\cos x$ são periódicas de período 2π . A função $\tan x$ é periódica de período π . A função $f(x) = x - [x]$ (onde $[x]$ é a parte inteira de x) tem período 1.

Note que, se T é período de uma função, então $2T, 3T, \dots, kT, \dots$ também o são (com $k \in \mathbb{Z}^*$). Por exemplo, 4π também é um período das funções $\sin x$ e $\cos x$. No entanto, 2π é o *menor período positivo* de $\sin x$ (e de $\cos x$), e portanto é chamado de seu período fundamental.

DEFINIÇÃO 2. O **período fundamental** de uma função periódica $f(x)$ é o seu menor período positivo.

Curiosamente, a função $f(x) = K$ (constante) é periódica com qualquer período $T \neq 0$. Portanto, ela não tem um **menor** período positivo, e, assim, não tem período fundamental. Exceto por este exemplo patológico, toda função periódica contínua tem um período fundamental.

PROPOSIÇÃO 1. a) Se T é um período de $f(x)$, então $\frac{T}{k}$ é um período de $h(x) = f(kx)$.
 b) Se T é um período comum às funções $f(x)$ e $g(x)$, então T será também um período das funções $c_1f + c_2g$ e $f \cdot g$ (para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).
 c) Se T é um período comum às funções $f_1, f_2, \dots, f_m, \dots$, então T será também um período de $\sum_{m=1}^{\infty} c_m f_m(x)$ (se esta série convergir).

PROOF. Vamos demonstrar apenas uma das afirmações acima – deixamos as outras como exercício. Seja $p(x) = (c_1f + c_2g)(x)$. Então:

$$p(x+T) = (c_1f + c_2g)(x+T) = c_1f(x+T) + c_2g(x+T) = c_1f(x) + c_2g(x) = p(x)$$

e, portanto, $p(x)$ é periódica. □

Da propriedade acima, rapidamente vemos que

- Como 2π é o período fundamental de $\sin x$, temos que $\frac{2L}{m}$ será o período fundamental de $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$. Em particular, $2L$ será um período de $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ (e de $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$);¹

¹Talvez seja mais familiar usar $w = \frac{m\pi}{L}$ (que representa a *frequência* das funções trigonométricas $\sin(wx)$ e $\cos(wx)$). Então o período fundamental é $T = \frac{2\pi}{w}$.

- Mas então $2L$ é um período comum a todas as funções do lado direito de 0.1 (incluindo a constante fora do somatório).

Conclusão: se há alguma esperança de que $f(x)$ possa ser escrita como uma soma do tipo 0.1, ela terá de ser periódica de período $2L$!

1. Exercícios

1) Mostre que 2π é, de fato, o período fundamental de $\sin x$. [Dica: suponha que T é um período positivo de $\sin x$; então $\sin(x+T) = \sin x$ para todo x ; substitua $x = 0$ para mostrar que T é múltiplo de π ; agora, mostre que $T = \pi$ não é período.]

2) Encontre um período da função $f(x) = 4 \sin\left(\frac{x}{7}\right) - 2 \cos\left(\frac{x}{5}\right)$.

Resposta: basta tomar um múltiplo comum a 14π e 10π – por exemplo, 70π serve.

3) Mostre que, se $f(x)$ é periódica de período T , então

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx$$

isto é, a integral de $f(x)$ num intervalo de comprimento T não depende do ponto inicial deste intervalo.

4) a) Mostre que, se $f(x)$ é periódica de período T e diferenciável, então $f'(x)$ também é periódica de período T .

b) Se $f(x)$ é periódica, pode-se dizer que $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ é periódica?

c) Mostre que, se $f(x)$ é periódica de período T e seu valor médio em $[0, T]$ é M , então $F(x) = \int_0^x f(t) dt - Mx$ é periódica.

Resposta: b) Não (experimente $f(x) = 1 + \sin x$, ou mesmo $f(x) = 1$).

5) a) Mostre que, se $\frac{a}{b}$ é racional (isto é, $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ com m e n inteiros), então $f(x) = \sin ax + \cos bx$ é periódica. [Dica: observe que $T = \frac{2\pi}{a}m = \frac{2\pi}{b}n$ será um período comum a ambas as funções trigonométricas.]

b) Mostre que, se $f(x) = \sin ax + \cos bx$ é periódica, então $\frac{a}{b}$ é racional (ou $b = 0$). [Dica: se $f(x)$ é periódica de período T , devemos ter $f(-T) = f(0) = f(T)$.]

Breve Revisão de Álgebra Linear

Lembremos novamente que o problema principal desta parte do curso é, dada uma função $f(x)$, encontrar coeficientes a_m e b_m tais que

$$(0.1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

Na Álgebra Linear, um problema bem conhecido era o de decompor um vetor conhecido \vec{v} como combinação linear de vetores de um conjunto $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_N\}$:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^N a_j \vec{w}_j$$

(provavelmente você trabalhava com $N = 3$).

Note a semelhança entre os dois problemas – se pudermos fingir que os vetores w_j são as funções do tipo $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ (bom, e talvez colocar $\vec{w}_0 = \frac{1}{2}$ para tomar conta da primeira constante a_0), e identificando \vec{v} com $f(x)$, o problema é o mesmo – encontrar os coeficientes de uma combinação linear¹! Assim, precisamos rever brevemente alguns conceitos da Álgebra Linear.

Em primeiro lugar, precisamos saber se podemos de fato pensar que funções são vetores. A resposta é definitivamente **SIM**. Basicamente, quaisquer objetos que possam ser somados entre si (assim como vetores são somados entre si) e multiplicados por constantes (assim como você pode multiplicar um vetor por uma constante) podem ser considerados como vetores (desde que esta soma e multiplicação tenham as propriedades "usuais"). Formalmente, temos:

DEFINIÇÃO 3. Um **espaço vetorial real** é um conjunto E (cujos elementos são chamados **vetores**) dotado de duas operações:

- i) Uma que associa um par de vetores \vec{v}, \vec{w} à sua **soma** (denotada por $\vec{v} + \vec{w}$);*
- ii) Outra que associa um vetor \vec{v} e um número real λ a seu produto (denotado por $\lambda\vec{v}$);*
que têm as seguintes propriedades

- **Soma:**

$$\text{para quaisquer } \vec{u}, \vec{v} \text{ e } \vec{w} \in E: \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}; \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

existe um vetor (chamado nulo, denotado $\vec{0}$) tal que para todo $\vec{u} \in E$ tem-se $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

$$\text{cada vetor } \vec{u} \text{ tem um simétrico (denotado } -\vec{u}) \text{ tal que } \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

- **Multiplicação por escalar:**

$$\text{para quaisquer } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ e qualquer } \vec{u} \in E, \text{ tem-se } \lambda_1 (\lambda_2 \vec{u}) = (\lambda_1 \lambda_2) \vec{u}$$

$$\text{para todo } \vec{u} \in E \text{ tem-se } 1\vec{u} = \vec{u}$$

- **Distributividade:**

$$\text{para quaisquer } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ e qualquer } \vec{u} \in E, \text{ tem-se } (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{u} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{u}$$

$$\text{para qualquer } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e quaisquer } \vec{u}, \vec{v} \in E \text{ tem-se } \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$$

Não é difícil ver que o conjunto de todas as funções reais de uma variável real é então um espaço vetorial – a soma de funções $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e a multiplicação por escalar $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ satisfazem todas as propriedades acima. Por exemplo, o vetor nulo é a função identicamente nula $\vec{0}(x) \equiv 0$. **Em suma, comece a pensar em funções como vetores!**²

¹A falha mais grave nesta analogia é que a soma proposta em 0.1 é **infinita**, e portanto não é exatamente uma combinação linear. Mas ainda assim, a analogia nos levará à teoria correta.

²Então a função $f(x) = x$ agora é um vetor. A função $g(x) = \arctan(e^x + \cos(x))$ é um outro vetor. Vá em frente e desenhe uma setinha para cada um no seu papel! A diagonal do paralelogramo com lados $f(x)$ e $g(x)$ é o vetor $(f + g)(x) = x + \arctan(e^x + \cos(x))$. A

EXEMPLO 2. *Os seguintes conjuntos são espaços vetoriais usando a soma e multiplicação usuais*

$$\begin{aligned} l^2 & : = \left\{ \text{seqüências } (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \text{ tais que } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty \right\} \\ \mathcal{L}^2[a, b] & : = \left\{ \text{funções } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } \int_a^b f^2(x) dx \text{ converge e } f \text{ é integrável} \right\} \\ C[a, b] & : = \{ \text{funções } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínuas} \} \end{aligned}$$

Agora voltemos ao seguinte problema da Álgebra Linear em \mathbb{R}^3 : temos 3 vetores ortogonais \vec{w}_1 , \vec{w}_2 e \vec{w}_3 (uma base de \mathbb{R}^3) e desejamos escrever um novo vetor \vec{v} como combinação linear destes 3:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \alpha_3 \vec{w}_3$$

Como encontrar os coeficientes α ? Se os vetores não são ortogonais, você deve estar pensando em montar um sistema e resolvê-lo, ou escrever o problema todo como notação matricial... Mas, se os vetores são ortogonais, há uma saída mais simples: tome, por exemplo, o produto interno da expressão acima por \vec{w}_1 e use as propriedades distributivas do produto interno:

$$\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle = \langle \alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \alpha_3 \vec{w}_3, \vec{w}_1 \rangle = \alpha_1 \langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \vec{w}_2, \vec{w}_1 \rangle + \alpha_3 \langle \vec{w}_3, \vec{w}_1 \rangle = \alpha_1 \langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle$$

onde usamos que os vetores w são ortogonais dois a dois. Assim, fica fácil encontrar o coeficiente α_1 sem ter que resolver um sistema complicado:

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle}$$

Analogamente, encontramos $\alpha_2 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle}$ e $\alpha_3 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_3 \rangle}{\langle \vec{w}_3, \vec{w}_3 \rangle}$.

Para usar este método no problema original 0.1 precisamos de alguma espécie de produto interno entre funções. O que precisamos é de uma operação que tenha as seguintes propriedades.

DEFINIÇÃO 4. *Um produto interno em um espaço vetorial E definido sobre \mathbb{R} é uma função*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u, v & \longmapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \text{Positividade:} & \quad \forall v \in E, & \quad \langle v, v \rangle \geq 0. \\ \text{Simetria:} & \quad \forall u, v \in E, & \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle; \\ \text{Linearidade:} & \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in E & \quad \langle \lambda_1 u + \lambda_2 v, w \rangle = \lambda_1 \langle u, w \rangle + \lambda_2 \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

(Alguns livros também exigem que $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \vec{0}$ mas em nosso contexto, esta condição não será necessária.)

EXEMPLO 3. *Em \mathbb{R}^n , o produto interno usual (chamado **canônico**) é fazer, dados $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$,*

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

Em outras palavras, o produto interno canônico "multiplica as coordenadas correspondentes dos dois vetores e depois soma tudo".

EXEMPLO 4. *As seguintes operações definem produtos internos canônicos em seus respectivos espaços*

$$(0.2) \quad \begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : l^2 & \times l^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u_1, u_2, \dots), (v_1, v_2, \dots) & \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i \\ \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2([a, b]) & \times \mathcal{L}^2([a, b]) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f(x), g(x) & \longmapsto \int_a^b f(x)g(x) dx \\ \langle \cdot, \cdot \rangle : C([a, b]) & \times C([a, b]) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f(x), g(x) & \longmapsto \int_a^b f(x)g(x) dx \end{aligned}$$

função $8g(x)$ é uma seta 8 vezes maior que $g(x)$, na mesma direção. Apenas lembre-se que as setinhas que você desenhou são arbitrárias, apenas para ajudar você a pensar nas funções como vetores (em particular, a setinha não tem nada a ver com o gráfico da função).

Note que todos os exemplos acima mantêm a idéia comum de "multiplicar coordenadas correspondentes e depois somar tudo". Deixamos como exercício para o leitor verificar que as operações acima satisfazem, de fato, as propriedades dos produtos internos³. Vale a pena notar que estes não são os únicos produtos internos nestes espaços, mas são os mais usuais (veja exercícios)⁴.

DEFINIÇÃO 5. *Dois vetores \vec{v} e \vec{w} em E são ditos **ortogonais** quando $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.*

EXEMPLO 5. *Em $C([-\pi, \pi])$ os vetores $\sin mx$ e $\sin nx$ (com m, n naturais positivos distintos) são ortogonais. De fato*

$$\begin{aligned} \langle \sin mx, \sin nx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)}{2} dx = \\ &= \left(\frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)} - \frac{\sin((m+n)x)}{2(m+n)} \right) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0 \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 2. *Os vetores $\vec{v}_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) e $\vec{w}_n = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) são ortogonais dois a dois em $\mathcal{L}^2([-L, L])$, isto é*

$$\begin{aligned} \left\langle \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\rangle &= 0 \quad (\text{para } m \neq n) \\ \left\langle \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\rangle &= 0 \quad (\text{para quaisquer } m \text{ e } n) \\ \left\langle \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\rangle &= 0 \quad (\text{para } m \neq n) \end{aligned}$$

Além disso

$$(0.3) \quad \begin{aligned} \left\| \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right\|^2 &= \left\langle \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right\rangle = L \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots \\ \left\| \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\|^2 &= \left\langle \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\rangle = L \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \\ \|1\|^2 &= \langle 1, 1 \rangle = 2L \end{aligned}$$

PROOF. São cálculos que deixamos como exercício para o leitor. □

Enfim, estamos prontos para sugerir uma possível fórmula para os coeficientes a_m e b_m na expressão

$$(0.4) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

onde f é uma função com um período em $[-L, L]$. Usando a notação da proposição acima, o problema é encontrar os coeficientes a_m e b_m tais que

$$\vec{f} = \frac{a_0}{2} \vec{w}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \vec{w}_m + b_m \vec{v}_m$$

Fazendo o produto interno com \vec{w}_0 , (lembre que \vec{w}_0 é a função constante 1) usando a distributividade do produto interno⁵ e o fato de \vec{w}_0 ser ortogonal a todos os outros vetores do lado direito

$$\langle \vec{f}, \vec{w}_0 \rangle = \frac{a_0}{2} \langle \vec{w}_0, \vec{w}_0 \rangle = a_0 L \Rightarrow a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

Analogamente para os outros coeficientes, temos

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{\langle \vec{f}, \vec{w}_m \rangle}{\langle \vec{w}_m, \vec{w}_m \rangle} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ b_m &= \frac{\langle \vec{f}, \vec{v}_m \rangle}{\langle \vec{v}_m, \vec{v}_m \rangle} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

³Note que é possível ter uma função $f(x)$ que não é identicamente nula mas tal que $\langle f(x), f(x) \rangle = 0$ – por exemplo, tome $[a, b] = [0, 2]$ e considere $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$. Se adicionássemos a condição $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$, este problema poderia ser contornado de maneira sutil: o vetor nulo de $\mathcal{L}^2([a, b])$ representaria não só a função nula, como qualquer função $f(x)$ tal que $\int_a^b f^2(x) dx = 0$. Isto tem o efeito colateral de colocar quaisquer duas funções que sejam diferentes apenas em um número finito de pontos no mesmo vetor, mas surpreendentemente todos os axiomas de espaço vetorial e do produto interno são satisfeitos neste novo conceito de vetores.

⁴Muitos usam $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx$ como produto interno canônico, o que praticamente não altera a teoria a seguir.

⁵Há um problema aqui: a distributividade do produto interno se aplica para somas **finitas**, mas estamos prestes a usá-la para uma soma **infinita**. Mais tarde justificaremos este passo propriamente.

Em suma, se $f(x)$ puder ser escrita na forma 0.4, espera-se que os coeficientes a_m e b_m sejam dados pelas fórmulas acima. Na seção seguinte, estudaremos se $f(x)$ é, de fato, da forma 0.4.

1. Exercícios

1) Em \mathbb{R}^3 verifique que $v_1 = (3, 1, -1)$ e $v_2 = (-1, 1, -2)$ são ortogonais. Seja $u = (0, 3, 2)$

- Calcule $a_j = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}$, $j = 1, 2$.
- Faça um esboço que contenha $v_1, v_2, u, a_1v_1, a_2v_2$ e $w = a_1v_1 + a_2v_2$.
- Calcule $r = u - w$.
- Faça um esboço que contenha v_1, v_2, u, w e r .
- Calcule $\langle r, w \rangle$. O que isto significa no esboço do item anterior?

2) Repita o problema anterior para cada um dos seguintes vetores u :

- $u_2 = (0, 1, 1)$
- $u_3 = (1, 3, -5)$
- $u_4 = (a, b, c)$.

Resposta: este problema e o anterior ilustram os seguintes fatos:

- Se u puder ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2 , o item (1a) calcula coeficientes a_1 e a_2 tais que $u = a_1v_1 + a_2v_2$;
- Se u não puder ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2 , ainda assim o processo é útil – o vetor $w = a_1v_1 + a_2v_2$ não será u , mas será a projeção ortogonal de u no plano gerado por v_1 e v_2 (e, portanto, a diferença entre u e w será a menor possível dentre os vetores w daquele plano).

3) Seja $\beta := \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ um conjunto de m vetores ortonormais em \mathbb{R}^n , $m < n$. Seja $u \in \mathbb{R}^n$. Dê uma interpretação geométrica para cada um dos valores a seguir:

- $a_i = \langle u, e_i \rangle$
- $\sum_{i=1}^m \langle u, e_i \rangle e_i$
- $u - \sum_{i=1}^m \langle u, e_i \rangle e_i$
- $\sum_{i=1}^m \langle u, e_i \rangle^2$

Enfim, mostre que

$$(u \text{ pertence ao subespaço gerado por } \beta) \iff u = \sum_{i=1}^m \langle u, e_i \rangle e_i \iff \sum_{i=1}^m a_i^2 = \|u\|^2.$$

4) Suponha que $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é um conjunto de vetores ortogonais. Suponha que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$, $a_i \in \mathbb{R}$. Calcule a_i em função dos vetores v_i e do vetor v .

Resposta: $a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$.

5) Mostre que as operações 0.2 definem, de fato, produtos internos em seus respectivos espaços.

6) Mostre que o seguinte conjunto de vetores é ortonormal em $\mathcal{L}^2([-L, L])$:

$$\beta := \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

7) Determine quais das seqüências v_i abaixo estão em l^2 . Para aquelas que estão em l^2 , encontre $\|v_i\|^2 = \langle v_i, v_i \rangle$.

- $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$
- $v_2 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{k+1}}, \dots)$
- $v_3 = (1, -7, 5, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$
- $v_4 = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$

Resposta: $\|v_2\|^2 = \frac{4}{3}$ e $\|v_3\|^2 = 75$; os outros não estão em l^2 .

8) Encontre 5 vetores ortogonais em l^2 .

Resposta: não há uma resposta única. Uma resposta criativa seria $v_1 = (1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$, $v_2 = (0, 0, -1, 0, 0, 0, \dots)$, $v_3 = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$, $v_4 = (0, 0, 0, 7, -7, 0, 0, \dots)$ e $v_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$.

Séries de Fourier

Inspirados pelas seções anteriores, somos levados à seguinte definição.

DEFINIÇÃO 6. *Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$ (integrável, absolutamente integrável). A **Série de Fourier de $f(x)$** é*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

onde

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

são os **coeficientes de Fourier** de $f(x)$.

Note que usamos o símbolo " \sim " ao invés de "=", pois ainda não sabemos se a série do lado direito converge para $f(x)$ em algum sentido.

EXEMPLO 6 (Onda Triangular). *Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π tal que $f(x) = |x|$ para $x \in [-\pi, \pi]$. Temos*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(mx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos mx dx$$

$u = x$	$dv = \cos mx dx$
$du = dx$	$v = \frac{\sin mx}{m}$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin mx}{m} \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin mx}{m} dx \right) = 0 + \frac{2}{\pi m} \left(\frac{\cos mx}{m} \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right) = \frac{2}{\pi m^2} ((-1)^m - 1)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(mx) dx = 0 \quad (\text{pois } |x| \sin mx \text{ é uma função ímpar})$$

Em suma

$$a_0 = \pi$$

$$a_m = \begin{cases} \frac{-4}{\pi m^2}, & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } m \text{ é par } \neq 0 \end{cases}$$

$$b_m = 0 \text{ para } m = 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, a série de Fourier de $f(x)$ é

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{\cos mx}{m^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \dots \right)$$

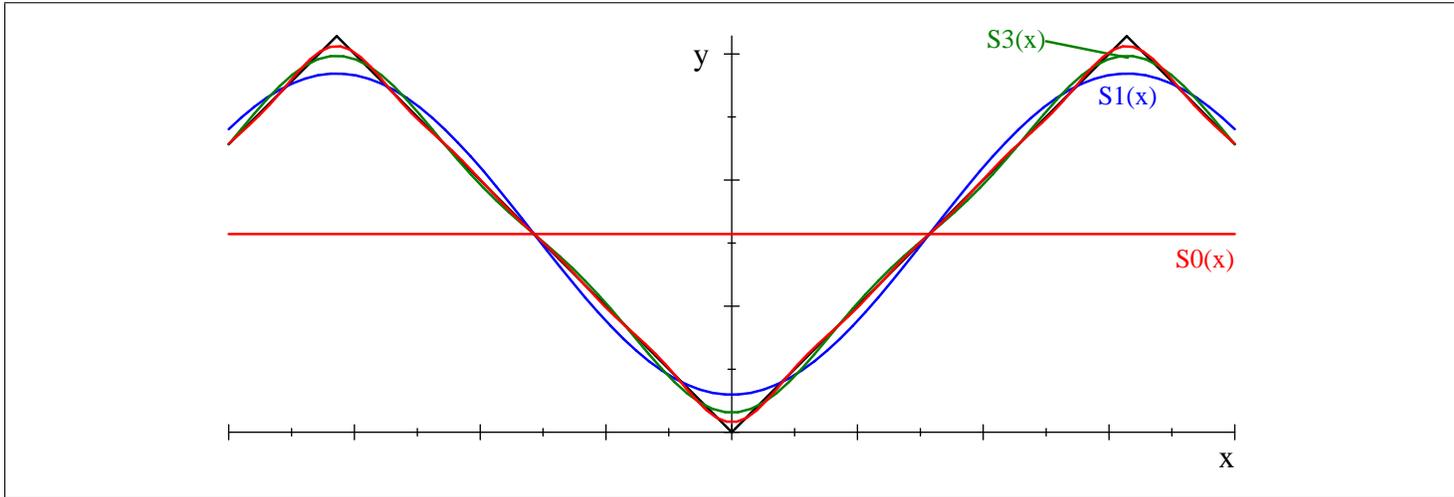
No gráfico abaixo, exibimos a função $f(x)$ do exemplo acima e as somas parciais

$$S_0(x) = \frac{\pi}{2}$$

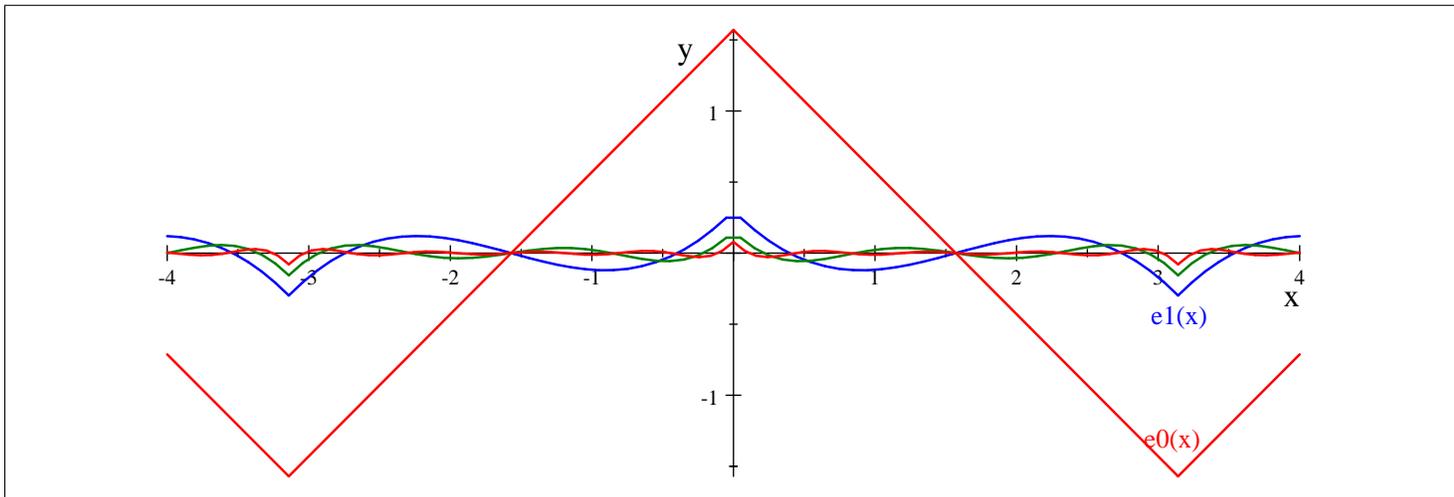
$$S_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x$$

$$S_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} \right)$$

$$S_7(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} \right)$$



Note como as somas parciais parecem convergir para $f(x)$. Para ilustrar melhor esta convergência, abaixo estão os gráficos das funções $e_n(x) = S_n(x) - f(x)$ para $n = 0, 1, 3, 7$. Numericamente, pode-se calcular que $|e_7(x)| \leq 0.008$ para todo x , ou seja, $S_7(x)$ aproxima $f(x) = |x|$ corretamente já com 2 casas decimais de precisão, independentemente de x .



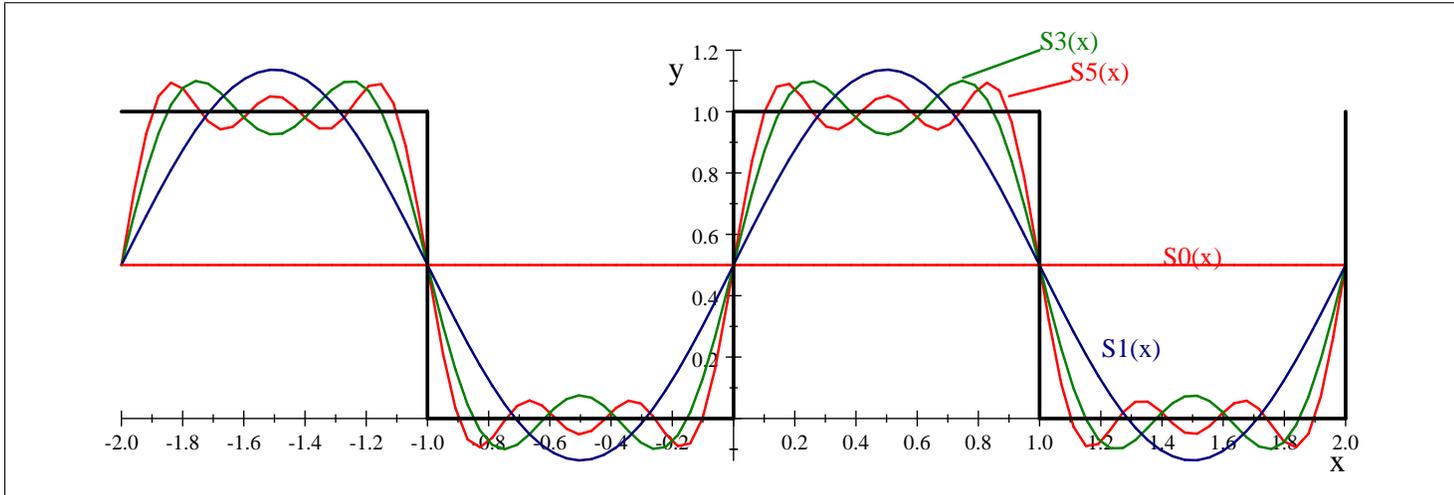
EXEMPLO 7 (Onda Retangular). Tomemos agora uma função $g(x)$ periódica de período 2 tal que $g(x) = 0$ para $-1 < x < 0$ e $g(x) = 1$ para $0 < x < 1$. Calculemos os coeficientes de Fourier de $g(x)$:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = 1 \\
 a_m &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 g(x) \cos(m\pi x) dx = \int_0^1 \cos(m\pi x) dx = \left[\frac{\sin(m\pi x)}{m\pi} \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \\
 b_m &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 g(x) \sin(m\pi x) dx = \int_0^1 \sin(m\pi x) dx = \left[-\frac{\cos(m\pi x)}{m\pi} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{(-1)^{m+1} + 1}{m\pi}
 \end{aligned}$$

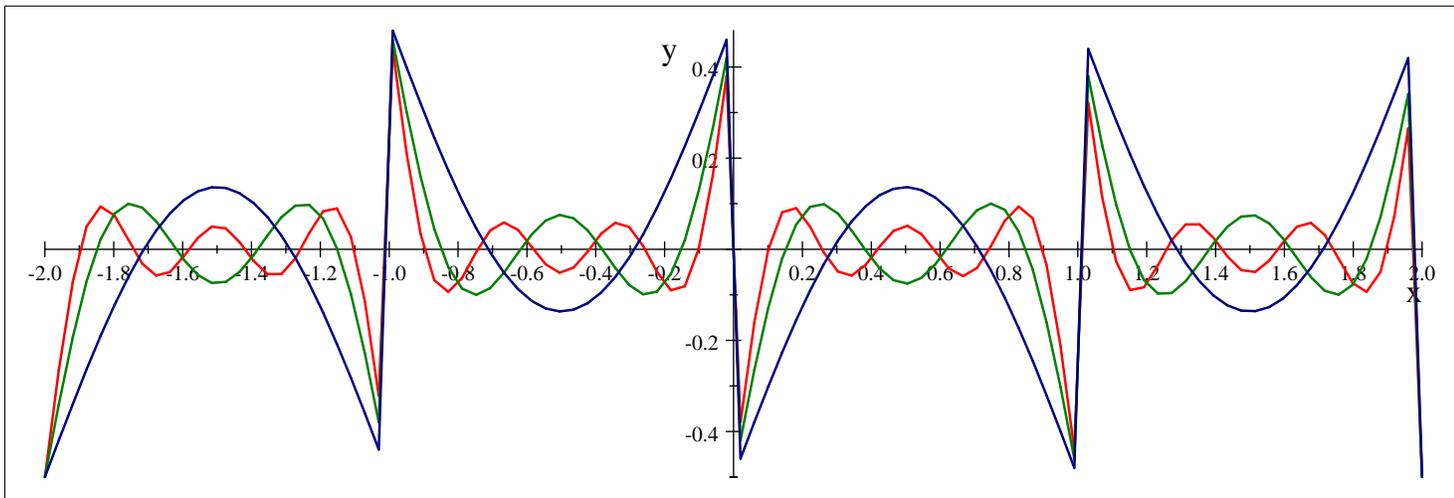
ou seja, $b_m = 0$ se m é par e $b_m = \frac{2}{m\pi}$ se m é ímpar. Portanto, a série de Fourier de $g(x)$ é

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + \dots \right)$$

Abaixo estão os gráficos das somas parciais da série de Fourier de $g(x)$



e das diferenças entre $g(x)$ e tais somas



Note que, neste caso, a convergência já não parece tão boa. Em primeiro lugar, há uma grande oscilação residual no erro; apesar de termos $e_n(x) \rightarrow 0$ para cada x onde $g(x)$ é contínua (vide Teorema a seguir), veremos mais tarde que $\max_{x \in (0,1)} (|e_n(x)|)$ não vai para 0.

Os exemplos acima parecem indicar que a série de Fourier de $f(x)$ converge para $f(x)$ (pelo menos nos pontos onde $f(x)$ é contínua). Mais tarde discutiremos as várias maneiras pelas quais a série de Fourier representa a função $f(x)$, mas vamos desde já citar sem demonstração um resultado importante sobre esta convergência.

DEFINIÇÃO 7. Uma função $f(x)$ é **seccionalmente contínua (ou contínua por partes) num intervalo finito** (a, b) quando for contínua em (a, b) exceto possivelmente em um número finito de pontos x_n onde existem e são finitos os seus limites laterais (denotados $f(x_0+)$ e $f(x_0-)$). Uma função $f(x)$ é **seccionalmente contínua** quando é seccionalmente contínua em cada intervalo finito da reta real.

EXEMPLO 8. A função $f(x)$ do primeiro exemplo deste capítulo é contínua, então é seccionalmente contínua. A função $g(x)$ do exemplo acima é seccionalmente contínua (pois tem um número finito de descontinuidades em cada intervalo limitado, e nestas descontinuidades os limites laterais existem). A função $\tan x$ **não** é seccionalmente contínua (apesar de ter um número finito de descontinuidades em cada intervalo limitado, o limite lateral $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$ não existe).

DEFINIÇÃO 8. Uma função $f(x)$ é **seccionalmente suave (ou suave por partes)** quando ambas $f(x)$ e sua derivada $f'(x)$ forem seccionalmente contínuas (com o entendimento de que a derivada pode não estar definida num número finito de pontos, mas os seus limites laterais $f'(x_0+)$ e $f'(x_0-)$ devem existir nesses pontos).

TEOREMA 1. Se $f(x)$ é seccionalmente suave, então para cada x_0 fixo a série de Fourier de $f(x)$ converge para

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

Em particular, se f é contínua em $x = x_0$, então a série de Fourier converge para $f(x_0)$ neste ponto.

Em termos das somas parciais

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

que estamos dizendo é que, se $f(x)$ for seccionalmente suave, então para cada x_0 real

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

até mesmo nos pontos onde $f(x)$ não é contínua.

EXEMPLO 9. Vimos que a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 2π com $f(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi]$ é

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \dots \right)$$

Como $f(x)$ é seccionalmente suave, o Teorema acima se aplica. Agora, como $f(x)$ é contínua, nem precisamos dos limites laterais. Podemos escrever diretamente

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \dots \right) \text{ para } -\pi \leq x \leq \pi$$

Em particular, tomando $x = 0$, obtemos uma bela identidade

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

EXEMPLO 10. Por outro lado, a série de Fourier da onda retangular acima é

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + \dots \right)$$

Como $g(x)$ é seccionalmente suave, podemos então dizer que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + \dots \right) \text{ para } 0 < x < 1 \\ 0 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + \dots \right) \text{ para } -1 < x < 0 \end{aligned}$$

pois $g(x)$ é contínua em $(-1, 0)$ e em $(0, 1)$. Porém no ponto 0, a série não se aproxima de $g(0)$, mas sim de

$$\frac{g(0+) + g(0-)}{2} = \frac{1}{2}$$

o que pode ser facilmente confirmado substituindo $x = 0$ na série de Fourier. Por outro lado, tomando $x = \frac{1}{2}$, obtemos outra bela identidade

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

1. Exercícios

- 1) Obtenha a série de Fourier de $f(x) = 2 \sin 3x + 4 \cos 5x$.
- 2) Calcule as séries de Fourier de $f(x) = \sin^2(x)$ e $g(x) = \cos^5(x)$.
- 3) (Sinal dente-de-serra) Calcule a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 2π tal que $f(x) = x$ para $-\pi < x \leq \pi$.
- 4) Calcule as série de Fourier das seguintes funções:
 - a) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } \sin(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } \sin(x) < 0 \end{cases}$
 - b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } -\pi \leq x < \pi \\ \text{periódica de período } 2\pi \end{cases}$
 - c) $f(x) = |\sin(wx)|$

5) a) Escreva a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 2π tal que $f(x) = 2x$ para $-\pi < x \leq \pi$.

b) Escreva a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 2π tal que $f(x) = x$ para $0 < x \leq 2\pi$.

- 6) a) Qual a relação entre os coeficientes de Fourier das funções $f(x)$ e $g(x)$ e os coeficientes da série de Fourier de $\alpha f + \beta g$ (com α e β constantes)?
- b) Como se relacionam os coeficientes de Fourier de $f(x)$ e de $g(x) = f(x) + \alpha$, com α constante?
- c) Como se relacionam os coeficientes de Fourier de $f(x)$, função periódica de período $2L$, e de $g(x) = f(x + \alpha)$, com α constante?
- d) Como se relacionam os coeficientes de Fourier de $f(x)$, função periódica de período $2L$, e de $g(x) = f(kx)$, com k constante?
- 7) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2 tal que $f(x) = x^2 + 1$ para $0 < x \leq 2$. Se $SF(x)$ é a série de Fourier de f , calcule $SF(0)$ e $SF(3)$.

Extensões Pares e Ímpares

DEFINIÇÃO 9. Uma função $f(x)$ é **par** se seu domínio é simétrico com relação à origem e $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}f$.

DEFINIÇÃO 10. Uma função $g(x)$ é **ímpar** se seu domínio é simétrico com relação à origem e $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in \text{Dom}f$.

EXEMPLO 11. As funções do tipo $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ são todas pares, enquanto as funções do tipo $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ são todas ímpares. A única função que é par e ímpar ao mesmo tempo é a função constante nula.

Cuidado! Há funções que não são pares nem ímpares! Por exemplo, $f(x) = x^2 + x$ não é par nem ímpar ($f(-1) = 0 \neq \pm 2 = \pm f(1)$).

PROPOSIÇÃO 3. Se $f(x)$ é par e $g(x)$ é ímpar, então

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L f(x) dx &= 2 \int_0^L f(x) dx \\ \int_{-L}^L g(x) dx &= 0\end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 4. Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são pares e $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são ímpares (e c_1, c_2 são números reais quaisquer)

$$\begin{aligned}c_1 f_1 + c_2 f_2 &\text{ é par (isto é, PAR+PAR = PAR)} \\ c_1 g_1 + c_2 g_2 &\text{ é ímpar (isto é, ÍMPAR+ÍMPAR = ÍMPAR)} \\ f_1(x) f_2(x) &\text{ é par (isto é, PAR.PAR = PAR)} \\ f_1(x) g_1(x) &\text{ é ÍMPAR (isto é, PAR.ÍMPAR = ÍMPAR)} \\ g_1(x) g_2(x) &\text{ é PAR (isto é, ÍMPAR.ÍMPAR = PAR)}\end{aligned}$$

Em geral, uma função par mais uma ímpar dá uma que não é par nem ímpar (a menos que uma delas seja constante). De fato, qualquer função $h(x)$ com domínio simétrico pode ser escrita como a soma de uma par com uma ímpar: basta tomar $f(x) + g(x)$ onde $f(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ e $g(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$ (verifique que f é par e g é ímpar!).

PROPOSIÇÃO 5. Se $f(x)$ é par então $b_m = 0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) em sua série de Fourier, e sua série de Fourier de $f(x)$ tem apenas **cosenos**. Se $g(x)$ é ímpar então $a_m = 0$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) em sua série de Fourier. Em outras palavras, a série de Fourier de $g(x)$ tem apenas **senos**.

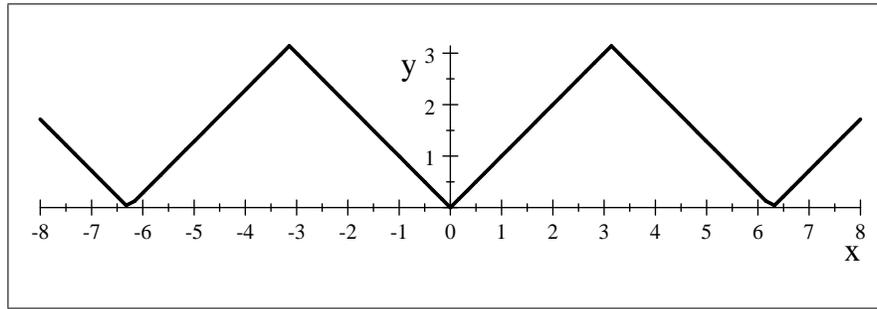
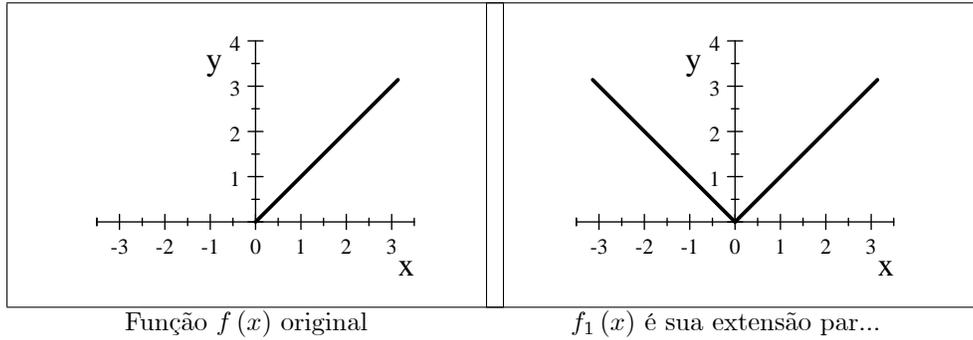
PROOF. De fato, se $f(x)$ é função par então $f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ é função ímpar e, portanto

$$b_m = \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

anulando todos os termos em senos da série de Fourier de $f(x)$. A demonstração para $g(x)$ é análoga. \square

EXERCISE 2. Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Como escrever $f(x)$ como uma soma (infinita) que tenha apenas cosenos?

Solução: se $f(x)$ for uma função par, podemos escrevê-la como uma soma de cosenos. Como a função desejada está definida apenas no intervalo $[0, \pi]$, basta estendê-la ao intervalo $[-\pi, 0]$ de maneira que ela seja par, ou seja, basta tomar $f(x) = -x$ em $[-\pi, 0]$. Agora estenda-a ao resto da reta de maneira que ela seja periódica, digamos, de período 2π (veja os gráficos abaixo):



Como esta última função é par e periódica de período 2π , sua série de Fourier terá apenas cossenos. Já fizemos este cálculo anteriormente; a série de Fourier desta última função é

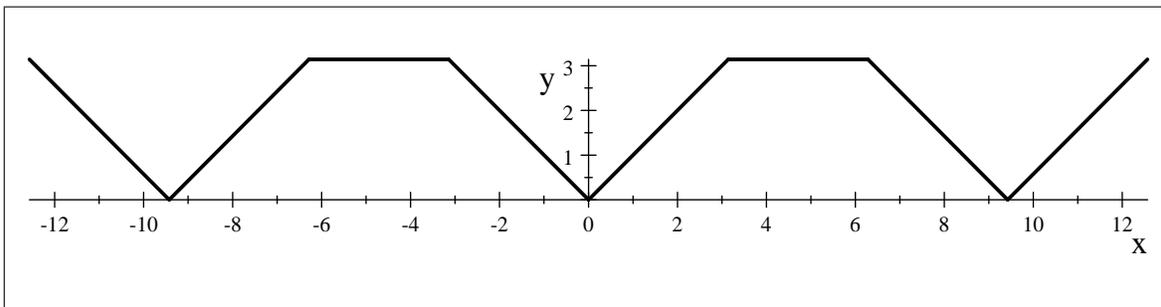
$$f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \dots \right)$$

Como $f_2(x)$ é contínua, a igualdade acima está garantida. Por outro lado, como $f_2(x) = f(x)$ no intervalo $[0, \pi]$, podemos também escrever

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \dots \right)$$

pele menos para $x \in [0, \pi]$.

Aliás, a opção acima não é a única forma de escrever $f(x)$ como soma de cossenos. Por exemplo, poderíamos primeiro estender $f(x) = \pi$ para $\pi \leq x \leq 2\pi$ e depois fazer a extensão par e periódica de período 4π , como na figura abaixo¹



Outra possível extensão par de $f(x)$

Calculando a série de Fourier desta função de período $2L = 4\pi$, obtém-se uma outra série que converge para $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq \pi$ – você consegue calcular esta nova série?

Em geral, dada uma função $f(x) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, sempre temos a opção de estendê-la ao intervalo $[-L, 0]$ de forma que ela seja par (ou ímpar), e daí estendê-la ainda mais para que ela seja periódica de período $2L$. Com isto obtém-se séries que representam $f(x)$ mas que têm apenas cossenos (ou senos). Não é difícil encontrar fórmulas que relacionam diretamente a função $f(x)$ aos coeficientes destas séries:

DEFINIÇÃO 11. Dada $f(x) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ define-se sua **série em senos** como

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad \text{onde } b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

¹Aliás, para ser preciso, você pode estender $f(x)$ inventando os valores que você quiser em $[\pi, 2\pi]$, depois estendê-la de forma par e enfim periódica de período $2A$; a série de Fourier da extensão convergirá para $f(x)$ onde quer que a extensão seja contínua!

Analogamente, sua **série em cossenos** é

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) \quad \text{onde } a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Usando estas fórmulas, você nem precisa realmente trabalhar com as tais extensões pares ou ímpares – as fórmulas acima nos dão diretamente a série em senos ou cossenos usando apenas integrais no intervalo $[0, L]$. Mesmo assim, é bom lembrar que:

- A série em senos de $f(x) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é a série de Fourier da extensão ímpar de $f(x)$ que tem período $2L$.
- A série em cossenos de $f(x) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é a série de Fourier da extensão par de $f(x)$ que tem período $2L$.
- Usando outras extensões e outros períodos, é possível obter outras séries só com senos ou cossenos que representam $f(x)$.

Enfim, o resto desta aula trata de como obter séries de senos ou cossenos onde apenas os coeficientes de ordem par (ou ímpar) aparecem. Em outras palavras, observe o exemplo acima – o que a função $f_2(x)$ tem de especial para que a sua série de Fourier tenha apenas os cossenos de ordem ímpar²?

PROPOSIÇÃO 6. *Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$. Suponha também que $f(x+L) = f(x)$ para todo x . Se usarmos o período $2L$ para calcular a série de Fourier de $f(x)$, todos os termos de ordem ímpar se anulam.*

PROOF. De fato

$$a_m = \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^0 f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Trocando u por x na primeira integral (apenas por conveniência) mas fazendo $u = x - L$ na segunda

$$a_m = \int_{-L}^0 f(u) \cos\left(\frac{m\pi u}{L}\right) du + \int_{-L}^0 f(u+L) \cos\left(\frac{m\pi u}{L} + m\pi\right) du$$

Agora que os limites são os mesmos, podemos juntar tudo numa integral só e usar que $f(u+L) = f(u)$ para todo u :

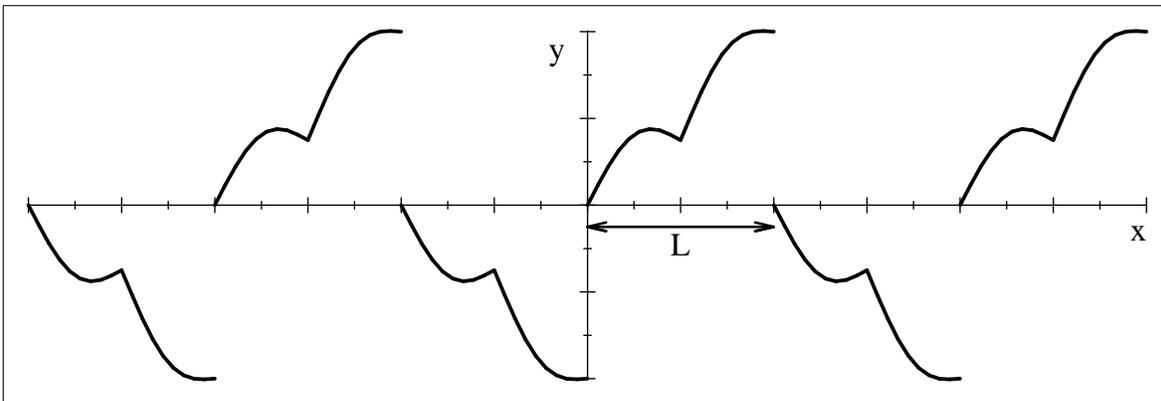
$$a_m = \int_{-L}^0 f(u) \left(\cos\left(\frac{m\pi u}{L}\right) + \cos\left(\frac{m\pi u}{L} + m\pi\right) \right) du$$

Porém, se m é ímpar, os dois cossenos se anulam, então $a_m = 0$. A demonstração de que $b_m = 0$ para m ímpar é totalmente análoga, trocando \cos por \sin . \square

PROPOSIÇÃO 7. *Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$. Suponha também que $f(x+L) = -f(x)$ para todo x . Então na série de Fourier de $f(x)$ todos os termos de ordem par se anulam.*

PROOF. A demonstração é análoga à anterior e fica como um exercício para o leitor. \square

Graficamente, a condição $f(x+L) = f(x)$ significa que f tinha um período menor que $2L$, a saber, L , mas este não foi usado ao calcularmos a série de Fourier. Já a segunda condição $f(x+L) = -f(x)$ pode ser ilustrada pelo gráfico abaixo:



Em suma, para obter uma série de Fourier, você precisa pensar numa extensão periódica; no entanto:

- Se você quer uma série de Fourier só com senos, estenda a sua função de forma que ela seja ímpar;
- Se você quer uma série de Fourier só com cossenos, estenda a sua função de forma que ela seja par;

²Para ser exato, a série de $f_2(x)$ tem um cosseno de ordem par, que é a constante inicial $\frac{\pi}{2}$. A pergunta correta então seria: o que a função $f_2(x) - \frac{\pi}{2}$ tem de especial?

- Se você quer apenas os termos de ordem par, estenda a sua função de forma que $f(x+L) = f(x)$ (e use o período $2L$);
- Se você quer apenas os termos de ordem ímpar, estenda a sua função de forma que $f(x+L) = -f(x)$.

Enfim, nada impede que você misture as idéias acima para obter uma série apenas com senos de ordem par, etc.

1. Exercícios

1) Para cada uma das funções $f(x)$ a seguir encontre (se possível) uma extensão periódica tal que as séries de Fourier das extensões têm as seguintes formas – em (a-e), você pode escolher o valor de L !

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_1(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sigma_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & d) \quad \mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_4(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \\
 b) \quad \mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & e) \quad \mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_5(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \\
 c) \quad \mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & f) \quad \mathcal{S}\tilde{\mathcal{F}}_6(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 i) f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1] & ii) f(x) = x^2 + 1, \quad 0 < x < 2 & iii) f(x) = \sin(x), \quad x \in [0, \pi] \\
 iv) f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \end{cases} & v) f(x) = \begin{cases} \tan(x) & \text{se } x \in (0, 1] \\ \sec(x) & \text{se } x \in [-1, 0] \end{cases}
 \end{array}$$

2) A seguir estão descritas 5 funções e 4 séries de Fourier. Cada uma das séries só pode corresponder a uma única função e, evidentemente, uma das funções não tem sua série representada. Faça as associações.

$$\begin{array}{ll}
 a) f_1(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in (-2, 2] \\ f(x+4) & = f(x) \end{cases} & b) f_2(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in (0, 4] \\ f(x+4) & = f(x) \end{cases} \\
 c) f_3(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{se } x \in (-\pi, \pi] \\ f(x+2\pi) & = f(x) \end{cases} & d) f_4(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \in (0, \pi] \\ -\sin(x) & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ f(x+2\pi) & = f(x) \end{cases} \\
 e) f_5(x) = \begin{cases} x^2 + 3x^4 & \text{se } x \in (-1, 1] \\ f(x+2) & = f(x) \end{cases}
 \end{array}$$

$$S_a = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \quad S_b = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$S_c = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos(nx) \quad S_d = \frac{\zeta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \cos(nx) + \eta_n \sin(nx)$$

A Identidade de Parseval

DEFINIÇÃO 12. A **norma de um vetor** \vec{v} (num espaço vetorial E de acordo com um produto interno previamente definido) é

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Note que este número é garantidamente real, por causa da positividade do produto interno.

EXEMPLO 12. Dado $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e usando o produto interno canônico, temos

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que é o "tamanho" do vetor \vec{v} com o qual estamos acostumados na Geometria Euclideana. Analogamente, dado $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

se estivermos usando o produto interno canônico.

EXEMPLO 13. Seja $f(t) \in \mathcal{L}^2([a, b])$ (lembre que este é o espaço de todas as funções reais integráveis com domínio $[a, b]$ cuja integral do quadrado também existe). Usando o produto interno usual, temos

$$\|f(t)\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(s) ds$$

Tipicamente, se $f(t)$ é um sinal, a quantidade $\|f(t)\|^2$ é a **energia** deste sinal. Aliás, note que a existência desta norma está atrelada ao fato de que $f \in \mathcal{L}^2$ – ou seja, \mathcal{L}^2 é o espaço vetorial de todos os sinais de energia finita.

Qual a relação entre a norma da soma de dois vetores e a norma de cada um deles – ou, na linguagem dos sinais, qual a relação entre a energia da superposição de dois sinais e a energia de cada um deles? Temos:

PROPOSIÇÃO 8.

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\langle f, g \rangle$$

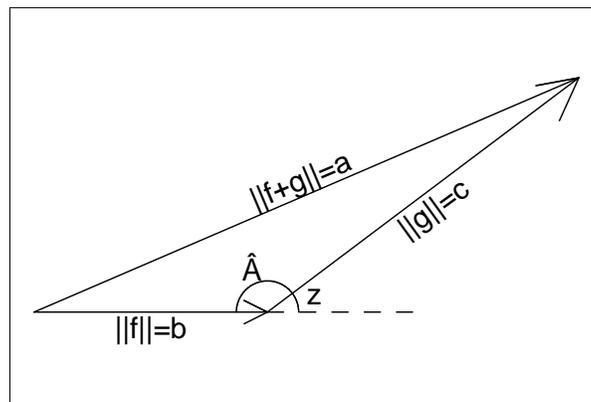
PROOF. Basta usar a distributividade do produto interno

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle = \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2$$

□

Note que esta é uma versão generalizada da Lei dos Cossenos. De fato, na Geometria Euclideana de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 tínhamos $\langle f, g \rangle = \|f\| \|g\| \cos z$ onde z era o ângulo entre os vetores f e g . Colocando $\|f + g\| = a$, $\|f\| = b$ e $\|g\| = c$, temos a conhecida lei dos cossenos (basta notar que $z = A - \pi \Rightarrow \cos z = -\cos A$):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



COROLÁRIO 1. Se f e g são ortogonais, então $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

O leitor atento notará que esta é uma generalização do Teorema de Pitágoras. Aliás, por falar em generalização, temos a seguinte proposição cuja demonstração é análoga à da Lei dos Cossenos acima:

PROPOSIÇÃO 9 (Teorema de Pitágoras). *Se $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ são ortogonais e $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, temos*

$$\|c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n\|^2 = c_1^2 \|f_1\|^2 + c_2^2 \|f_2\|^2 + \dots + c_n^2 \|f_n\|^2$$

Agora, suponha que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

(o que ocorre, por exemplo, se $f(x)$ for contínua e os coeficientes a_m e b_m vierem de sua série de Fourier). Como os vetores do conjunto $\left\{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}$ onde $m = 0, 1, 2, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$ são ortogonais dois a dois, não ficaríamos surpresos¹ se valesse uma igualdade semelhante ao Teorema de Pitágoras acima

$$\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{4} \|1\|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \left\|\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\|^2 + b_m^2 \left\|\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\|^2$$

Como já vimos mais cedo (equações 0.3 na página 9), $\|1\|^2 = 2L$ e $\left\|\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\|^2 = \left\|\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\|^2 = L$, então

$$\|f\|^2 = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 + b_m^2 \right)$$

Mesmo em alguns casos em que a série de Fourier não converge exatamente para $f(x)$, o resultado acima ainda vale (desde que $f(x)$ seja razoavelmente bem comportada). Para ser exato, pode-se mostrar que:

TEOREMA 2 (Identidade de Parseval). *Seja $f(x) \in \mathcal{L}^2([-L, L])$ (isto é, $f(x)$ é uma função integrável e de quadrado integrável no intervalo $[-L, L]$). Então*

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)$$

onde $\{a_m\}_0^{\infty}$ e $\{b_m\}_1^{\infty}$ são os coeficientes da série de Fourier de $f(x)$.

EXEMPLO 14. *Voltemos mais uma vez à série de Fourier da onda triangular*

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} \text{ para } x \in [-\pi, \pi]$$

isto é, os únicos coeficientes não-nulos são

$$a_0 = \pi; \quad a_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)^2}$$

onde $n = 1, 2, \dots$. Portanto, pela identidade de Parseval, temos

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2n-1)^2} \right)^2$$

Como a integral do lado esquerdo é $\frac{2\pi^3}{3}$, temos mais uma bela identidade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$$

EXEMPLO 15. *Voltemos mais uma vez à série de Fourier da onda retangular*

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1}$$

isto é, os únicos coeficientes não-nulos são

$$a_0 = 1; \quad b_{2k-1} = \frac{2}{\pi(2k-1)}$$

¹Cuidado, este argumento não é uma demonstração rigorosa do jeito que está! O "Teorema de Pitágoras" acima foi demonstrado para somas *finitas*. Agora, estamos prestes a utilizá-lo para uma soma infinita. Nem tudo que vale para somas finitas vale para somas infinitas!

onde $k = 1, 2, \dots$. Pela identidade de Parseval:

$$\frac{1}{1} \int_{-1}^1 g(x) dx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(2k-1)} \right)^2$$

Como a integral do lado esquerdo vale 1, temos novamente a seguinte identidade

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

1. Exercícios

1) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π tal que $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$.

a) Calcule a série de Fourier de $f(x)$.

b) Utilize a identidade de Parseval e o item (a) para calcular o valor da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

c) Use a série do item (a) para calcular $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Resposta: a) e b) são o exemplo da onda retangular acima; c) $\frac{\pi}{4}$.

2) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2 tal que

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [0, 1) \\ x-1 & \text{se } x \in [-1, 0) \end{cases}$$

Se a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f , calcule $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

3) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2 tal que $f(x) = x^3 - x$ para $x \in [-1, 1]$.

a) Calcule a série de Fourier de $f(x)$.

b) Utilize a identidade de Parseval para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Resposta: a) $f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 12}{m^3 \pi^3} \sin(m\pi x)$ b) $\pi^6/945$.

4) Mostre que não existe função $f(x)$ de quadrado integrável tal que

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mx)}{\sqrt{m}}$$

isto é, função periódica de período 2π cujos coeficientes de Fourier sejam $a_m = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) e $b_m = \frac{1}{\sqrt{m}}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$).

5) Demonstre o "Teorema de Pitágoras" do texto.

Derivação e Integração de Séries de Fourier

O objetivo desta aula é calcular rapidamente os coeficientes das séries de Fourier de $f'(x)$ e de $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ a partir dos coeficientes de Fourier de $f(x)$ de maneira rápida, sempre que possível.

Em primeiro lugar, note que a derivação termo-a-termo da série de Fourier nem sempre nos dá resultados satisfatórios:

EXEMPLO 16 (Dente de Serra). *Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π tal que $f(x) = x$ para $-\pi < x < \pi$. Não é difícil calcular*

$$f(x) \sim 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right)$$

Será que a série de Fourier da derivada de f é a derivada, termo-a-termo, da série de f ? Em outras palavras, será que

$$1 \stackrel{??}{=} 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \cos(mx) = 2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \dots)$$

pelo menos no intervalo $(-\pi, \pi)$ onde f é derivável? A resposta é NÃO! De fato, a função constante 1 é a sua própria série de Fourier! Aliás, note que a série do lado direito nem mesmo converge! Por exemplo, para $x = 0$, teríamos a série $2(1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$, que não converge (oscila entre 2 e 0)! Pior ainda – pela identidade de Parseval, nenhuma função de quadrado integrável pode ter uma série de Fourier com coeficientes $(2, -2, 2, -2, \dots)$ como a que está do lado direito, pois a soma de seus quadrados não é finita! Neste caso, a derivação termo a termo da série de Fourier foi um desastre completo!

Por outro lado, se a função periódica $f(x)$ for **contínua** em \mathbb{R} , temos o seguinte resultado.

TEOREMA 3 (Derivada da Série de Fourier). *Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$, seccionalmente derivável e **contínua em toda a reta real**. Se a série de Fourier de $f(x)$ é*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

Então a série de Fourier de $f'(x)$ é

$$f'(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

onde $A_0 = 0$, $A_m = \frac{m\pi}{L} b_m$ e $B_m = -\frac{m\pi}{L} a_m$. Ou seja, a série de Fourier de $f'(x)$ pode ser obtida derivando termo a termo a série de $f(x)$.

PROOF. De fato, como f é periódica de período $2L$, então f' também o será. Vamos calcular explicitamente os coeficientes da série de Fourier de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ B_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Como $f(x)$ é contínua, podemos usar o T.F.C. para obter¹:

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) dx = \frac{f(L) - f(-L)}{L} = 0$$

¹O Teorema Fundamental do Cálculo ($\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$) ainda vale se $g(x)$ é diferenciável em $[a, b]$ exceto num número finito de pontos desde que $g(x)$ seja contínua. Agora, se $g(x)$ não fosse contínua, não poderíamos usá-lo. Considere, por exemplo, a função $g(x) = [x]$. Temos $g'(x) = 0$ (exceto para valores inteiros de x). Note que neste caso $\int_a^b g'(x) dx = 0$ mas $g(b) - g(a) \neq 0$!

onde usamos que $f(L) = f(-L)$ (pois f tem período $2L$). Também podemos integrar por partes² e fazer para $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{L} \left(f(x) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \Big|_{x=-L}^{x=L} + \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \frac{m\pi}{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \right. \\ &= \frac{(-1)^m}{L} (f(L) - f(-L)) + \left(\frac{m\pi}{L}\right) \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{m\pi}{L} b_m \\ B_m &= \frac{1}{L} \left(-f(x) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \Big|_{x=-L}^{x=L} - \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \frac{m\pi}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \right. \\ &= 0 - \left(\frac{m\pi}{L}\right) \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = -\frac{m\pi}{L} a_m \end{aligned}$$

□

EXEMPLO 17 (Onda Triangular). *Mais uma vez, a série de Fourier da onda triangular $f(x)$ (periódica de período 2π tal que $f(x) = |x|$ para $x \in [-\pi, \pi]$) é*

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \dots \right)$$

Como $f(x)$ é contínua, podemos derivar termo a termo

$$f'(x) \sim \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$$

onde $f'(x)$ é a onda retangular de período 2π definida por $f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (0, \pi) \\ -1, & \text{se } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$.

EXERCISE 3. a) *Seja $g(x)$ a função periódica de período 2π tal que $g(x) = x$ para $x \in [-\pi, \pi]$. Encontre a sua série de Fourier.*

b) *Seja $G(x)$ a função periódica de período 2π tal que $G(x) = \frac{x^2}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$. Encontre a sua série de Fourier.*

Solução: a) Como $g(x)$ é ímpar, sabemos que sua série não terá cossenos. Os coeficientes B_m dos senos serão

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(mx) dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{m} \cos(mx) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{m} \cos(mx) dx = \right. \\ &= (-1)^{m+1} \frac{2}{m} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{m} \right)^2 (\sin(mx) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}) = \frac{(-1)^{m+1} 2}{m} \end{aligned}$$

Então

$$g(x) \sim 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \sin(mx)}{m}$$

b) Poderíamos fazer os cálculos como no item acima, mas note que $G(x)$ é contínua (com $G(\pi) = G(-\pi)$ nos extremos de um período) e $G'(x) = g(x)$. Assim, se

$$G(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx))$$

O Teorema acima garante que a série de Fourier de $g(x)$ será

$$g(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} (mb_m \cos(mx) - ma_m \sin(mx))$$

Mas esta última é conhecida do item (a)! Assim, temos:

$$mb_m = A_m = 0 \Rightarrow b_m = 0 \text{ para } m = 1, 2, 3, \dots$$

(o que era de se esperar pois $G(x)$ é par) e

$$-ma_m = B_m = \frac{(-1)^{m+1} 2}{m} \Rightarrow a_m = \frac{(-1)^m 2}{m^2} \text{ para } m = 1, 2, 3, \dots$$

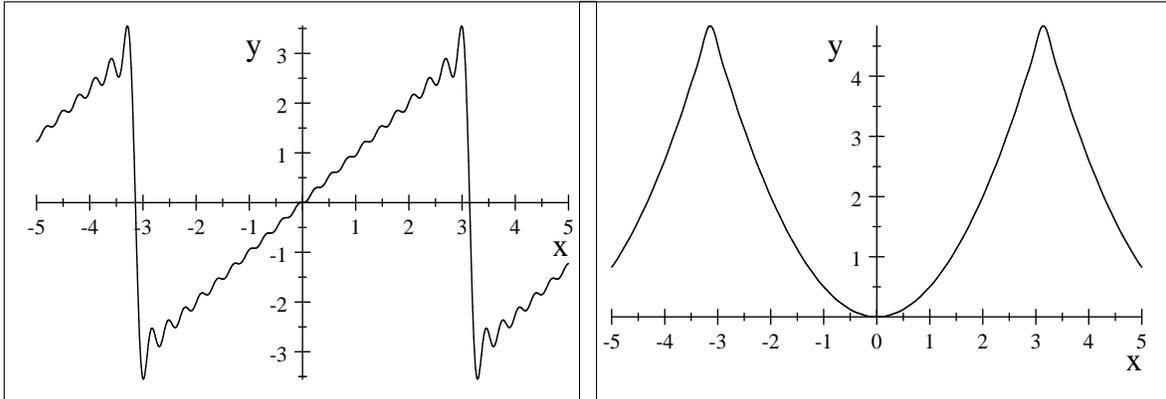
Só falta mesmo calcular a_0 , o que pode ser feito diretamente

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^3}{6} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \right) = \frac{\pi^2}{3}$$

²A fórmula de integração por partes é o T.F.C. aplicado à função uv . A nota acima garante a correção deste cálculo pois tanto f como as funções trigonométricas são contínuas.

Assim

$$G(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos(mx)$$



A 20a soma parcial da série de $g(x)$

A 20a soma parcial da série de $G(x)$

A propósito, note as oscilações na vigésima soma parcial de $g(x)$, que são muito mais intensas do que as oscilações presentes na vigésima soma parcial de $G(x)$. O mesmo fenômeno é observado nas somas parciais da série de Fourier da onda retangular mas não aparece na onda triangular. Este fenômeno (*fenômeno de Gibbs*) será analisado mais à frente.

A idéia do exercício anterior pode ser enunciada por um teorema:

TEOREMA 4 (Integração da Série de Fourier). *Seja $f(x)$ uma função periódica seccionalmente contínua de período $2L$ com série de Fourier dada por*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

Então a função $F(x) = \int_0^x (f(t) - \frac{a_0}{2}) dt$ é contínua, periódica de período $2L$ e sua série de Fourier é

$$F(x) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{L}{m\pi} b_m \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{L}{m\pi} b_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \frac{L}{m\pi} a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

(que é exatamente a série de $f(x) - \frac{a_0}{2}$ integrada termo a termo de 0 até x ; note a igualdade nesta segunda expressão!).

PROOF. O T.F.C. garante que $F(x)$ é diferenciável em todos os pontos onde $f(x)$ é contínua, com $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$. Nos pontos onde $f(x)$ é descontínua, como existem os limites laterais de $f(x)$, esta função será limitada (não pode se aproximar de $\pm\infty$), e portanto $F(x)$ será contínua. Assim, $F(x)$ é contínua em toda a reta real.

Para mostrar que F é periódica, note que

$$F(x+2L) - F(x) = \int_x^{x+2L} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right) dx = \left(\int_x^{x+2L} f(x) dx \right) - a_0 L = \int_{-L}^L f(x) dx - a_0 L = 0$$

pois $f(x)$ é periódica de período $2L$, então sua integral em qualquer intervalo de comprimento $2L$ tem sempre o mesmo valor. Assim, F é periódica de período $2L$.

Sendo assim, podemos calcular a série de Fourier de $F(x)$, digamos

$$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

Como F é contínua, podemos aplicar o teorema da derivação de séries de Fourier para encontrar³

$$a_m = \frac{m\pi}{L} B_m \text{ e } b_m = -\frac{m\pi}{L} A_m \Rightarrow A_m = \frac{-L}{m\pi} b_m \text{ e } B_m = \frac{L}{m\pi} a_m$$

Falta apenas mostrar que $\frac{A_0}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L}{m\pi} b_m$. No entanto como $F(x)$ é contínua, a sua série de Fourier converge para $F(x)$. Em particular, para $x = 0$:

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos(0) + B_m \sin(0)) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m$$

³Note que as letras maiúsculas aqui fazem o papel das minúsculas no enunciado daquele teorema, e vice-versa.

Mas por outro lado $F(0) = \int_0^0 (f(t) - \frac{a_0}{2}) dt = 0$. Assim

$$\frac{A_0}{2} = - \sum_{m=1}^{\infty} A_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L}{m\pi} b_m$$

Enfim, $F(x)$ é igual à sua série de Fourier pois $F(x)$ é contínua. □

COROLÁRIO 2. Outra maneira de escrever o teorema acima é

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{L}{m\pi} a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \frac{L}{m\pi} b_m \left(\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) - 1 \right) \right)$$

que se parece ainda mais com a integração termo-a-termo da série de Fourier de $f(x)$.

COROLÁRIO 3. Enfim, como $\int_a^b f(t) dt = \int_0^b f(t) dt - \int_0^a f(t) dt$, concluímos que, se f é seccionalmente contínua,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \frac{a_0}{2} dt + \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \right) dt$$

ou seja, a série de Fourier de uma função seccionalmente contínua pode ser integrada termo a termo num intervalo $[a, b]$ qualquer.

EXEMPLO 18. Vamos calcular a série de Fourier da função periódica de período 2π dada por $h(x) = x^3$ para $x \in [-\pi, \pi]$. Ao invés de fazer cálculos complicados, podemos integrar a série de Fourier do exemplo anterior⁴

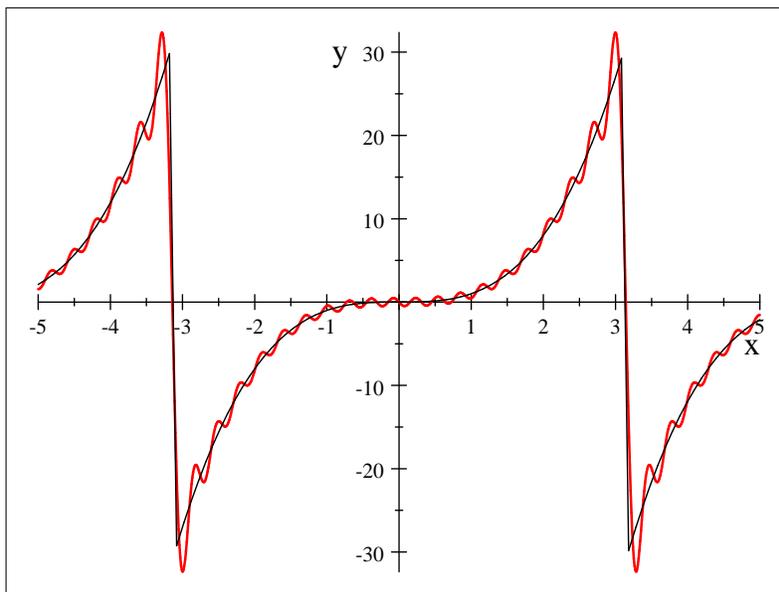
$$\frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos(mx) \Rightarrow \frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2 x}{6} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2}{m^3} \sin(mx)$$

Agora, a série de Fourier de x (com período 2π) também já foi calculada acima

$$x \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 2 \sin(mx)}{m}$$

(note que aqui não vale a igualdade em $x = \pm\pi$). Então

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{6} &\sim \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{2}{m^3} - \frac{2}{m} \frac{\pi^2}{6} \right) \sin(mx) \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 &\sim \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{12 - 2\pi^2 m^2}{m^3} \right) \sin(mx) \end{aligned}$$



20a soma parcial da série de x^3 . As oscilações estão de volta.

⁴Todas as igualdades a seguir valem para $x \in [-\pi, \pi]$.

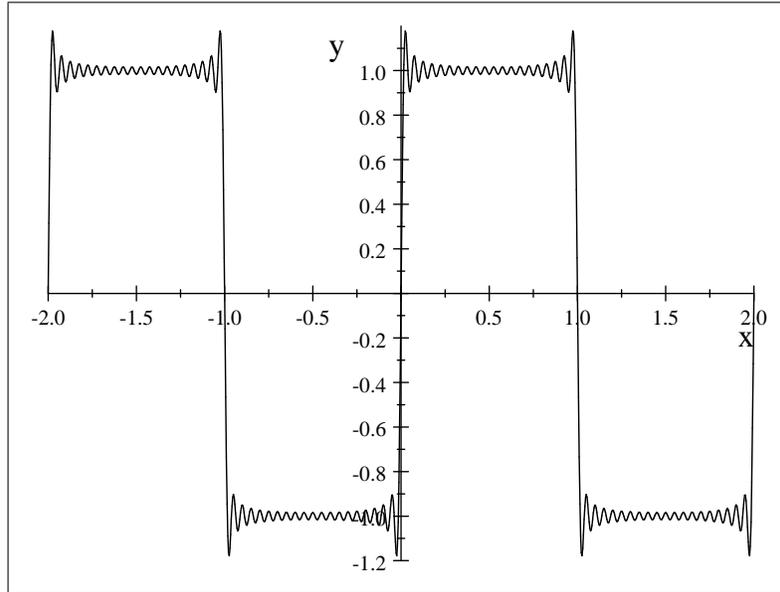
1. Exercícios

1) Calcule a série de Fourier da função periódica de período 2π que coincide com x^4 em $[-\pi, \pi]$.

2) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2 tal que $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1 \\ -1, & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$ (uma onda retangular).

a) Mostre que

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1}$$



A vigésima soma parcial da série de $f(x)$

b) Derivando os dois lados desta equação, temos

$$f'(x) = 0 \sim 4 \sum_{k=1}^{\infty} \cos((2k-1)\pi x)$$

No entanto, o somatório do lado direito não é a série de Fourier da função nula. O que está errado?

3) Integre 3 vezes a expressão

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{m} \sin(mx) \quad \text{para } -\pi < x < \pi$$

para obter uma expressão para $\frac{x^4}{24}$ (não se preocupe em obter a *série de Fourier* de $\frac{x^4}{24}$, apenas uma expressão!). A partir desta expressão, mostre que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}; \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4} = \frac{7\pi^4}{720}$$

Enfim, some estas expressões para obter

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

4) Mostre que

$$\sin(\pi x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2-1} \cos(2m\pi x) \quad \text{para } x \in (0, 1)$$

e, derivando esta, que

$$\cos(\pi x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{4m^2-1} \sin(2m\pi x) \quad \text{para } x \in (0, 1)$$

Podemos continuar o processo e concluir que

$$\sin(\pi x) = -\frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{4m^2-1} \cos(2m\pi x) ?$$

Convergência Pontual e Uniforme

Sabemos que, se $f(x)$ é seccionalmente suave e contínua, a série de Fourier de $f(x)$ "converge" para $f(x)$. Em outras palavras, se analisarmos a seqüência das somas parciais $\{s_0(x), s_1(x), s_2(x), \dots\}$ onde

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

esta seqüência "se aproxima" de $f(x)$. Nesta seção, discutimos mais formalmente o que queremos dizer com "converge" ou "se aproxima".

Assim, considere uma seqüência de funções $f_n(x)$ onde $n = 1, 2, 3, \dots$. Gostaríamos de discutir se elas se aproximam em algum sentido da função $f(x)$. Se pensarmos que $f_n(x)$ são estimativas para $f(x)$, é natural considerar a função erro

$$e_n(x) = |f_n(x) - f(x)|.$$

Baseado nesta função erro, temos duas noções de convergência.

DEFINIÇÃO 13 (Convergência simples ou pontual). *Diz-se que uma seqüência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ **converge pontualmente** para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se, para cada $x \in X$, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = 0$. Formalmente, isto significa que, dado um "erro aceitável" qualquer $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$, temos um certo $N_0 \in \mathbb{N}$ a partir do qual tem-se $e_n(x) < \varepsilon$. Em símbolos*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq N_0$$

DEFINIÇÃO 14 (Convergência uniforme). *Diz-se que uma seqüência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ **converge uniformemente** para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in X} e_n(x) \right) = 0$$

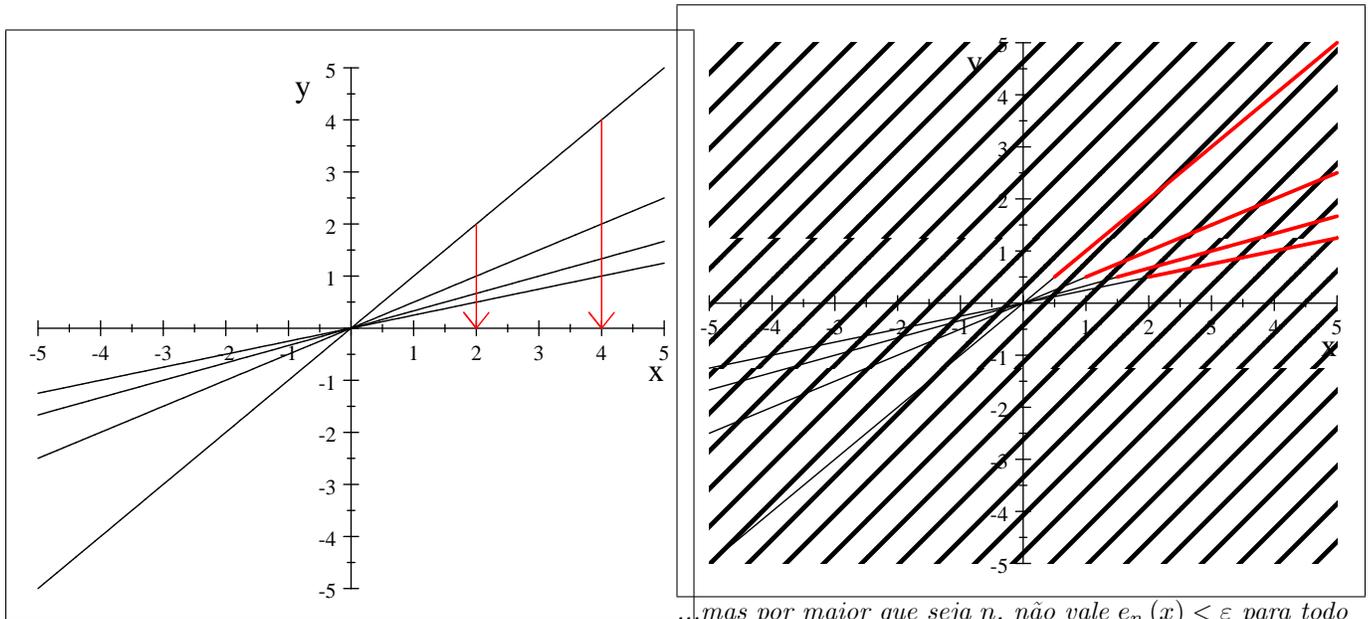
isto é¹, dado um "erro aceitável" qualquer $\varepsilon > 0$, temos um certo $N_0 \in \mathbb{N}$ a partir do qual, para todo $x \in X$, tem-se $\sup_{x \in X} e_n(x) < \varepsilon$. Em símbolos

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq N_0$$

A diferença entre os conceitos acima é que na convergência pontual o N_0 pode depender de x , mas na convergência uniforme (dado um $\varepsilon > 0$) tem-se um N_0 que serve para todos os x ao mesmo tempo. Vejamos alguns exemplos para esclarecer esta diferença.

EXEMPLO 19. *Seja $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Para cada x fixo, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$, então a seqüência $\frac{x}{n}$ **converge pontualmente** para a função nula. No entanto, dado um erro aceitável $\varepsilon > 0$, é impossível escolher um n tal que $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ para todo x , isto é, **a convergência não é uniforme!** De fato, note que para cada n temos $\sup_{x \in \mathbb{R}} e_n(x) = +\infty \neq 0!$*

¹O supremo de uma função é a menor cota superior que ela admite (o que pode ser um máximo ou uma espécie de "máximo não atingido"). Por exemplo, a função x definida para $0 < x < 1$ não tem máximo igual a 1 (pois ele nunca é atingido), mas tem **supremo** 1. A função $f(x) = 6 - e^x$ não tem máximo 6 (pois ele nunca é atingido), mas tem **supremo** 6.



Para cada x , tem-se $f_n(x) \rightarrow 0 \dots$

...mas por maior que seja n , não vale $e_n(x) < \varepsilon$ para todo x !

Por exemplo, se quisermos que o erro entre $f_n(x)$ e o limite $f(x) = 0$ seja menor que 0.005, para cada x basta fazer

$$\left| \frac{x}{n} \right| < 0.005 \Rightarrow n > 200|x|$$

Assim, para $x = 1$ precisamos passar de f_{200} ; para $x = 2$ precisamos pelo menos ir até f_{400} ; para $x = 2000$, tome f_{400000} e o erro será menor que 0.005. E assim por diante, cada x com o seu n . Mas não há como tomar um n que faça com que o erro seja menor que 0.005 **simultaneamente** para todo x – qualquer n que você escolha, tome $x > \frac{n}{200}$ e você verá valores de x que "escapam" ao erro "aceitável" de 0.005.

Em suma, todos os valores de $f_n(x)$ vão "morrer" em $f(x) = 0 \dots$ mas não **"ao mesmo tempo"**!

EXEMPLO 20. Agora seja $A > 0$ fixo e considere $f_n : [0, A] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Desta vez, a convergência é uniforme! Afinal,

$$|f_n(x) - 0| \leq \frac{A}{n} \text{ para todo } x \in [0, A]$$

Assim, dado um erro $\varepsilon > 0$, basta tomar $n > \frac{A}{\varepsilon}$ e garantiremos que $|f_n(x) - 0| \leq \varepsilon$ para todo $x \in [0, A]$. Ou, com a noção de máximo/supremo, a convergência é uniforme pois

$$\max_{x \in [0, A]} e_n(x) = \frac{A}{n} \rightarrow 0$$

à medida que $n \rightarrow \infty$.

EXEMPLO 21. Tomemos agora $g_n(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g_n(x) = x^n$. Pontualmente, veja que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

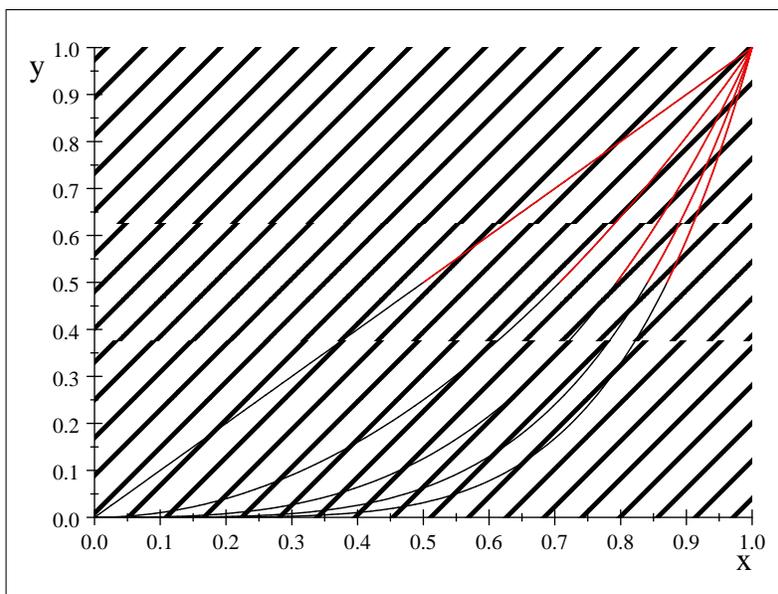
No entanto, esta convergência não é uniforme! De fato, note que para $x < 1$ temos

$$g_n(x) - g(x) = x^n - 0 = x^n$$

que fica arbitrariamente próximo de 1 quando $x \rightarrow 1$. Assim

$$\sup_{x \in [0, 1]} e_n(x) = 1$$

isto é, o erro máximo nunca fica abaixo de 1. Por este motivo a convergência não é uniforme.

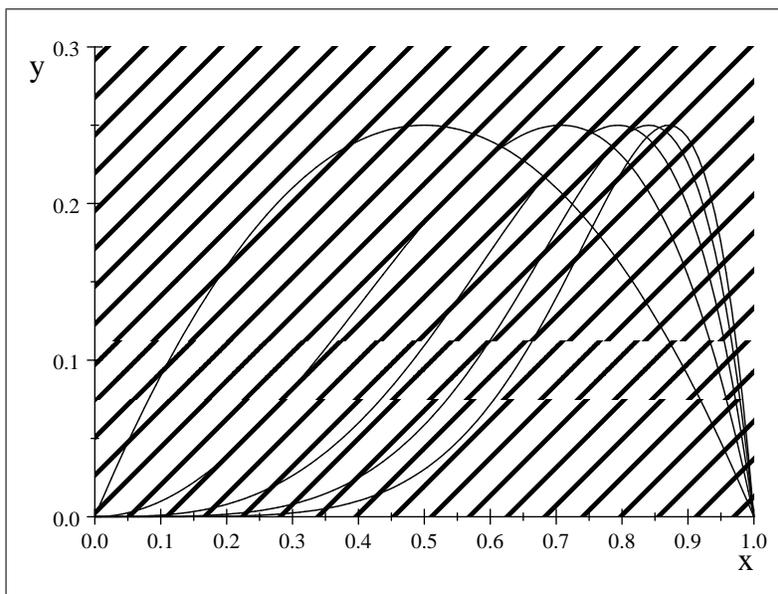


Para $\varepsilon = 0.5$, sempre tem x fora da faixa de raio ε em volta do limite.

EXEMPLO 22. Tome $h_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_n(x) = x^n(1 - x^n)$. Novamente, é fácil ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 0$$

para cada x . Tomando $e_n(x) = |h_n(x) - 0| = x^n(1 - x^n)$, com um pouco de cálculo vê-se que $\max_{x \in [0,1]} e_n(x) = \frac{1}{4}$ (máximo este que ocorre para $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$). Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} e_n(x) = \frac{1}{4} \neq 0$, e então a convergência não é uniforme.



Para $\varepsilon = 0.1$, sempre tem x fora da faixa de raio ε em volta do limite 0.

A convergência uniforme tem algumas propriedades que a convergência pontual não pode garantir, como veremos a seguir (sem demonstrações).

TEOREMA 5. Suponha que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente. Então:

- i) Se cada $f_n(x)$ é contínua em $[a, b]$, então $f(x)$ é contínua em $[a, b]$.
- ii) Se cada $f_n(x)$ tem integral em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Note que o Teorema acima não é válido se a convergência não for uniforme: o exemplo 21 acima mostra que uma seqüência de funções contínuas $g_n(x)$ pode muito bem convergir *pontualmente* para uma função descontínua; por outro lado, o exercício (1) abaixo exhibe uma seqüência h_n tal que $h_n(x) \rightarrow 0$ pontualmente sem que valha

$\int_0^1 h_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$. Enfim, note que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ não garante que $f'_n(x) \rightarrow f'(x)$ *nem mesmo com convergência uniforme* (veja exercício (2)).

Neste momento, pedimos ao leitor que reflita sobre as conseqüências destas considerações. No primeiro exemplo do capítulo anterior, vimos que

$$x = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) \text{ para } -\pi < x < \pi$$

O que é um somatório "até infinito"? Ou seja, o que realmente significa aquele "..."? A interpretação correta da expressão acima é: definindo

$$s_n(x) = 2 \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right)$$

temos $s_n(x) \rightarrow x$ *pontualmente* (à medida que $n \rightarrow \infty$). Em geral, uma expressão deste tipo *não pode ser integrada termo-a-termo* (a menos que a convergência seja uniforme) *nem derivada termo-a-termo* (nem que a convergência seja uniforme)².

Para terminar esta seção, vamos agora re-enunciar o Teorema de Convergência de Séries de Fourier usando esta nova linguagem:

TEOREMA 6. *Se $f(x)$ é (periódica de período $2L$) e seccionalmente suave, então as somas parciais $s_n(x)$ da sua série de Fourier convergem **pontualmente** para*

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

(Em particular, se f é contínua em $x = x_0$, então a série de Fourier converge para $f(x_0)$ neste ponto).

Mais ainda, se $f(x)$ é também contínua em todos os pontos do intervalo **fechado** $[a, b]$, então a convergência é uniforme no intervalo $[a, b]$.

EXEMPLO 23. *Voltemos mais uma vez ao exemplo da onda retangular $g(x)$, periódica de período 2, tal que*

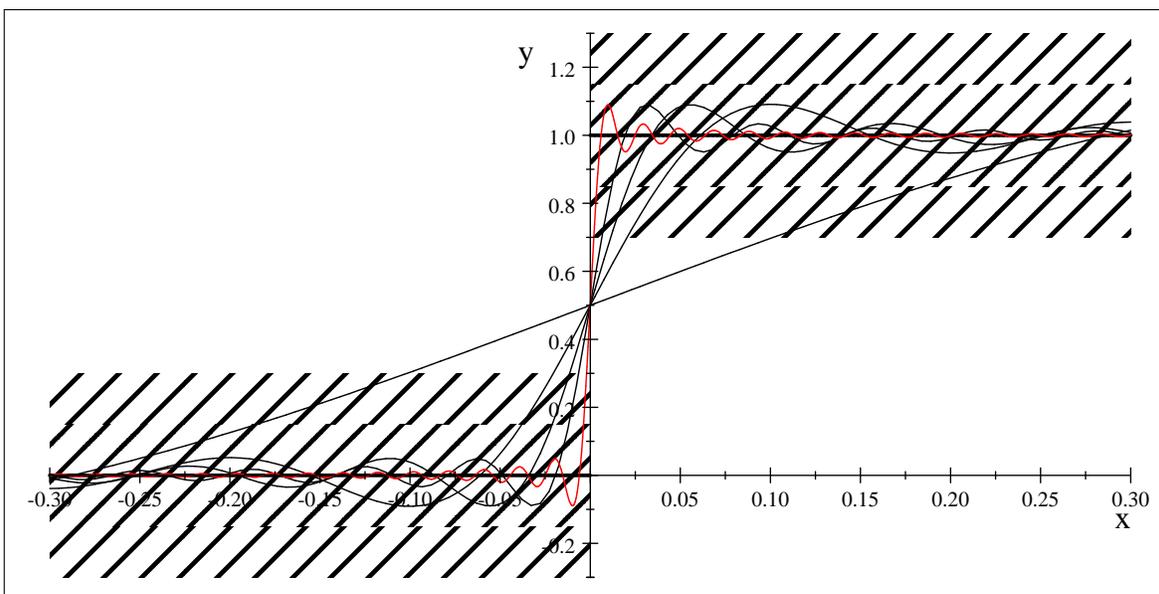
$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases} . \text{ A sua série de Fourier é}$$

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{2k-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5} + \dots \right)$$

Pelo Teorema de Convergência, já sabemos que esta série de Fourier converge para $g(x)$ exceto nos pontos da forma $x = k \in \mathbb{Z}$. Nestes pontos, g é descontínua, e a série de Fourier convergirá para $\frac{g(k+) + g(k-)}{2} = \frac{1}{2}$.

Portanto, a série de Fourier converge para uma função descontínua, e, por este motivo, a convergência não pode ser uniforme em toda a reta real (como \sin e \cos são contínuas, quando a série de Fourier convergir uniformemente, o limite tem de ser contínuo). Isto dito, como $g(x)$ é contínua nos intervalos fechados da forma $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ (onde $0 < \varepsilon < 1$), dentro deles a série de Fourier converge uniformemente para 1 (e, analogamente, a série converge uniformemente para 0 nos intervalos fechados da forma $[-1 + \varepsilon, -\varepsilon]$). Note que o Teorema **não garante** convergência uniforme no intervalo $(0, 1)$, apesar de $g(x)$ ser contínua ali – o problema é que este intervalo não é fechado, então o Teorema não se aplica.

²Isto dito, para séries de Fourier, estas séries **podem** ser derivadas e integradas termo-a-termo **nas condições dos teoremas do capítulo anterior**.

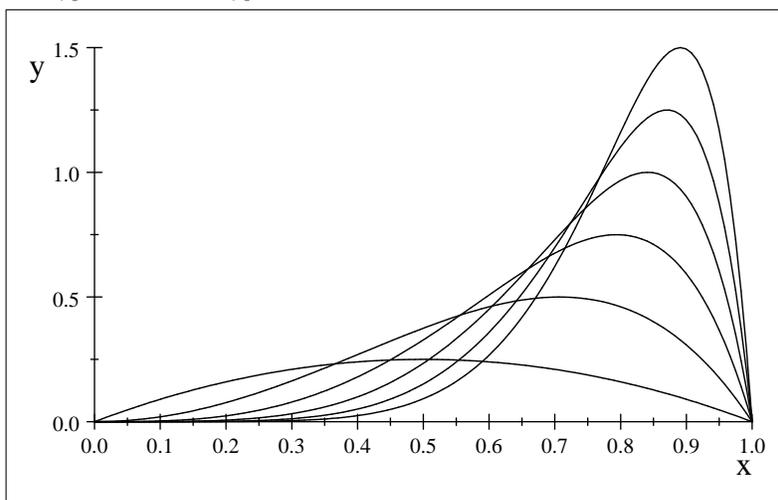


Zoom nas somas parciais de ordem 1, 9, 17, 31 e 101.

Para entender melhor a convergência não-uniforme da série de Fourier da onda quadrada, veja o gráfico acima³: o gráfico vermelho, mais "oscilante", tem termos de ordem até 101 da série de Fourier, mas ainda há um pequeno pedaço dele que fica fora da faixa definida por "erro máximo de 0.1 em volta do limite $g(x)$ ". De fato, por maior que seja N , a soma parcial $s_N(x)$ jamais estará completamente contida naquela faixa – o erro máximo entre $s_N(x)$ e $g(x)$ será sempre 0.5 (que ocorre logo à direita do ponto $x = 0$).

1. Exercícios

- 1) Considere a seqüência de funções $h_n(x) = nx^n(1-x^n)$ para $x \in [0, 1]$.
 - a) Mostre que $h_n(x) \rightarrow 0$ pontualmente.
 - b) Mostre que $\int_0^1 h_n(x) dx \rightarrow \frac{1}{2}$ à medida que $n \rightarrow \infty$.
 - c) Conclua que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h_n(x) dx \neq \int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)) dx$.

 $h_n(x) \rightarrow 0$ mas a área sob o gráfico de h_n se aproxima de $\frac{1}{2}$.

- 2) Considere a seqüência $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.
 - a) Mostre que $f_n(x) \rightarrow 0$ pontualmente e uniformemente (quando $n \rightarrow \infty$).
 - b) Mostre que $f'_n(x) \not\rightarrow 0$ à medida que $n \rightarrow \infty$.
- 3) A série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 2π dada por $f(x) = x$ para $-\pi < x \leq \pi$ é

$$f(x) \sim 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right)$$

³No gráfico, usamos escalas distintas para x e y para destacar o intervalo $x \in [-0,3, 0,3]$.

Pergunta-se:

- a) Esta série converge para $f(x)$ em toda a reta real? Mais especificamente, em que pontos a série não converge para $f(x)$? Para onde a série converge nestes pontos?
 b) A convergência desta série é uniforme?
 c) Falso ou verdadeiro:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2 \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} = x$$

pontualmente para cada $x \in [5, 6]$.

- d) Falso ou verdadeiro: dado um erro máximo aceitável $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$\left| x - 2 \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} \right| < \varepsilon$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Justifique.

- e) Falso ou verdadeiro: dado um erro máximo aceitável $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$\left| x - 2 \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} \right| < \varepsilon$$

para todo $x \in [0, 1]$. Justifique.

Respostas: a) A série não converge para $f(x)$ nos pontos da forma $x = k\pi$ (onde $k \in \mathbb{Z}$). Nestes pontos, a série converge para $\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$.

b) Não é uniforme – uma série de funções contínuas não pode convergir uniformemente para uma função descontínua, como é o caso aqui.

c) Falso. Lembre que $f(x) = x$ apenas para $x \in (-\pi, \pi)$! No intervalo $[5, 6]$, $f(x) = x - 2\pi$ (pela periodicidade), então

$$2 \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \frac{\sin mx}{m} \rightarrow x - 2\pi$$

d) Falso. A frase é equivalente a dizer que a convergência é uniforme em $[-\pi, \pi]$ – e a função limite é descontínua em $-\pi$ e π .

e) Verdadeiro. A frase é equivalente a dizer que a convergência é uniforme em $[0, 1]$, o que é garantido pelo Teorema de Convergência já que $f(x)$ é contínua neste intervalo (e seccionalmente suave).

Forma Complexa da Série de Fourier

Lembremos as seguintes relações entre exponenciais complexas e funções trigonométricas¹:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Daqui, temos

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ e } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Estas relações sugerem que a série de Fourier em senos e cossenos pode ser substituída por uma série de exponenciais complexas. Isto pode ser feito diretamente (veja exercício (1)), mas preferimos aqui re-obter esta série a partir de conceitos de Álgebra Linear.

DEFINIÇÃO 15. Um produto interno em um espaço vetorial E definido sobre \mathbb{C} é uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$u, v \longmapsto \langle u, v \rangle$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

Positividade: $\forall v \in E, \quad \langle v, v \rangle \geq 0$
(Anti)Simetria: $\forall u, v \in E, \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle};$
Linearidade: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall u, v, w \in E \quad \langle \lambda_1 u + \lambda_2 v, w \rangle = \lambda_1 \langle u, w \rangle + \lambda_2 \langle v, w \rangle.$

Em suma, um produto interno complexo tem as mesmas propriedades do produto interno real – exceto que $\langle u, v \rangle$ é agora o **conjugado complexo** de $\langle v, u \rangle$.

EXEMPLO 24. O próprio conjunto \mathbb{C} é um espaço vetorial complexo. Aliás, lembre-se que qualquer número complexo $z = x + yi$ (com x, y reais) pode ser re-escrito na forma

$$z = re^{i\theta}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\tan \theta = \frac{y}{x}$ (como em coordenadas polares). Em \mathbb{C} , o produto interno canônico é

$$\langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \overline{z_2}$$

que também pode ser escrito em coordenadas cartesianas ou polares

$$\begin{aligned} \langle x_1 + y_1 i, x_2 + y_2 i \rangle &= (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i \\ \langle r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2} \rangle &= (r_1 e^{i\theta_1}) (r_2 e^{-i\theta_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

Com este produto interno, tem-se

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \sqrt{z \overline{z}} = |z|$$

¹Para o leitor interessado, uma maneira de enxergar esta relação é via séries de potências. Afinal, podemos definir a função e^z da seguinte forma

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

que converge absolutamente para todo z complexo. Daqui,

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \frac{i^6 z^6}{6!} + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i \frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{iz} &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \end{aligned}$$

O primeiro termo acima é exatamente a série de potências da função $\cos z$; o segundo é a série de $\sin z$. Assim

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

para qualquer z complexo. Se, em particular, z é real, então $\cos z$ é a parte real e $\sin z$ é a parte imaginária.

ou seja, a norma do vetor z é exatamente o módulo do número complexo z . Em outros tipos de coordenadas:

$$\begin{aligned} z &= x + yi \Rightarrow \|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z &= re^{i\theta} \Rightarrow \|z\| = |z| = r \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 16. No espaço vetorial de todas as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, o **produto interno canônico** é definido por

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

PROPOSIÇÃO 10. Considere o espaço das funções $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$. Com este produto interno canônico, o conjunto de todas as funções da forma $e_k(x) = e^{ikw_0x}$ ($k \in \mathbb{Z}$) é ortonormal (onde $w_0 = \frac{\pi}{L}$).

PROOF. De fato, se m e n são inteiros quaisquer, temos

$$\langle e^{imw_0x}, e^{inw_0x} \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{imw_0x} \overline{e^{inw_0x}} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i(m-n)w_0x} dx$$

Agora, se $m \neq n$, a integral acima vale

$$\frac{1}{2L} \left(\frac{e^{i(m-n)w_0x}}{i(m-n)w_0} \right) \Big|_{x=-L}^{x=L} = \frac{e^{i(m-n)w_0L} - e^{-i(m-n)w_0L}}{2L(m-n)w_0i} = \frac{(e^{i\pi})^{m-n} - (e^{i\pi})^{n-m}}{2L(m-n)w_0i} = \frac{(-1)^{m-n} - (-1)^{n-m}}{2L(m-n)w_0i} = 0$$

pois $m-n$ e $n-m$ têm a mesma paridade. Por outro lado, se $m = n$

$$\langle e^{imw_0x}, e^{imw_0x} \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^0 dx = 1$$

Assim, o conjunto $\{\dots, e^{-3iw_0x}, e^{-2iw_0x}, e^{-iw_0x}, 1, e^{iw_0x}, e^{2iw_0x}, \dots\}$ é ortonormal. \square

Agora, seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$. Se for possível decompor o vetor $f(x)$ como uma "combinação linear infinita" dos vetores $\vec{w}_k(x) = e^{ikw_0x}$ (onde $w_0 = \frac{\pi}{L}$), isto é,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikw_0x}$$

então é de se esperar que

$$c_k = \frac{\langle f(x), e^{ikw_0x} \rangle}{\langle e^{ikw_0x}, e^{ikw_0x} \rangle} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ikw_0x} dx$$

DEFINIÇÃO 17. Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$. A **forma complexa da série de Fourier** de $f(x)$ é

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw_0x}$$

onde $w_0 = \frac{\pi}{L}$ e

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ikw_0x} dx$$

PROPOSIÇÃO 11 (Relação entre notação real e complexa). Se a série de Fourier de $f(x)$ (em senos e cossenos) é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx))$$

então os coeficientes c_k da forma complexa são

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots \\ c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2} \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Em particular, se os coeficientes a_k e b_k são todos reais (o que ocorre sempre que $f(x)$ é uma função real), então $c_{-k} = \overline{c_k}$.

PROOF. Basta notar que

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) (\cos kw_0x - i \sin kw_0x) dx = \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx \right) - i \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx \right)$$

Se $k = 0$, o primeiro termo em parênteses é $\frac{a_0}{2}$ e o segundo é nulo. Se $k > 0$, o primeiro termo é $\frac{a_k}{2}$ e o segundo é $\frac{b_k}{2}$. Enfim, se $k < 0$ o primeiro termo ainda é $\frac{a_k}{2}$ (pois \cos é função par) e o segundo troca de sinal (pois \sin é ímpar). \square

EXEMPLO 25 (Onda Retangular). Seja $g(x)$, periódica de período 2π , tal que $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$.

Temos $w_0 = \frac{\pi}{L} = 1$ e portanto

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx$$

Se $k = 0$, então $c_0 = \frac{1}{2}$. Caso contrário:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik\pi} - 1}{-ik} = \frac{i}{2\pi k} \left((-1)^k - 1 \right)$$

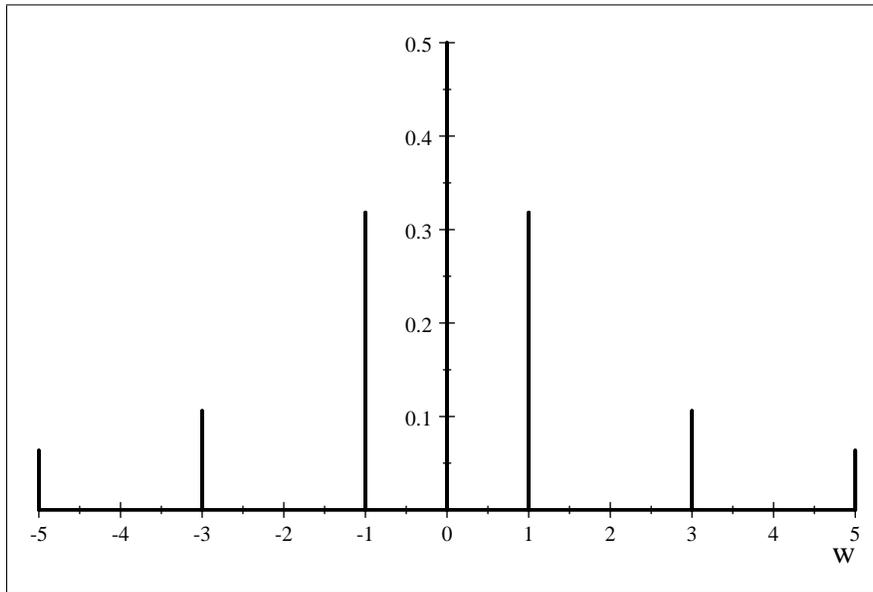
ou seja, juntando tudo

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k = \pm 2, \pm 4, \dots \\ \frac{-i}{k\pi}, & \text{se } k \text{ for ímpar} \end{cases}$$

e assim

$$g(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}$$

Intepretação física: a onda retangular $g(x)$ é composta por uma componente contínua com amplitude $\frac{1}{2}$ e várias outras componentes, cada uma com freqüência $2n-1$ e amplitude $\frac{1}{|2n-1|\pi}$ (o $-i$ é apenas uma mudança de fase²). O gráfico dos coeficientes $|c_k|$ é uma representação do sinal no chamado **espaço de freqüências**.



Espectro da onda retangular

A partir da relação entre c_k e $\{a_k, b_k\}$, é fácil ver que, para $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$c_k e^{ikw_0x} + c_{-k} e^{-ikw_0x} = a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) + b_k \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right)$$

²Uma onda de freqüência w e amplitude A pode ser imaginada como a função $f(t) = Ae^{iwt} = A \cos wt + iA \sin wt$ (se você não gosta da parte complexa, finja que apenas a parte real é observável). Multiplicar esta onda por um número complexo $z = re^{i\theta}$ produz o seguinte resultado:

$$zf(t) = A r e^{i(wt+\theta)} = Ar \cos(wt + \theta) + iAr \sin(wt + \theta)$$

Ou seja, o efeito foi multiplicar a amplitude por r e deslocar a fase (atrasar a onda) em θ unidades – mas a freqüência w da onda permanece inalterada. Por isto, multiplicar por $-i = e^{-i\pi/2}$ significa apenas um atraso de fase de $-\frac{\pi}{2}$ radianos, sem alterar a amplitude.

Daqui, segue imediatamente que

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^N \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikw_0 x}$$

ou seja, **a forma complexa da série de Fourier é completamente equivalente à forma real!** Por este motivo, todos os Teoremas já citados para séries de Fourier se aplicam à sua forma complexa, com as devidas adaptações. Por exemplo:

TEOREMA 7 (Convergência). *Se $f(x)$ é seccionalmente suave (e periódica de período $2L = \frac{2\pi}{w_0}$), então*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikw_0 x} = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

Mais ainda, se além disso $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$, esta convergência é uniforme no intervalo $[a, b]$.

TEOREMA 8 (Derivadas). *Se $f(x)$ é periódica de período $\frac{2\pi}{w_0}$, contínua e sua série de Fourier complexa é*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw_0 x}$$

então sua derivada tem série de Fourier complexa dada por

$$f'(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ikw_0 c_k) e^{ikw_0 x}$$

Em linguagem de Teoria de Sinais, o processo de derivação multiplica a componente de frequência $w = kw_0$ pela constante $ikw_0 = iw$ – na prática, multiplicando a amplitude por w e causando uma mudança de fase. Note que altas frequências são ampliadas e baixas frequências são atenuadas neste processo de derivação.

TEOREMA 9 (Integrais). *Seja $f(x)$ uma função periódica seccionalmente contínua de período $\frac{2\pi}{w_0}$ com série de Fourier complexa dada por*

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw_0 x}$$

Então a função $F(x) = \int_0^x (f(t) - c_0) dt$ é contínua, periódica de período $2L$ e sua série de Fourier é

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{ikw_0} e^{ikw_0 x}$$

Em outras palavras

$$\int_0^x f(t) dt = c_0 x + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{ikw_0} e^{ikw_0 x}$$

Em linguagem de Teoria de Sinais, o processo de integração atenua as altas frequências e destaca as baixas frequências.

EXEMPLO 26 (Onda Triangular). *Subtraindo a componente contínua da onda retangular (periódica de período 2π) $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$, ficamos com*

$$g(x) - \frac{1}{2} \sim \frac{i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}$$

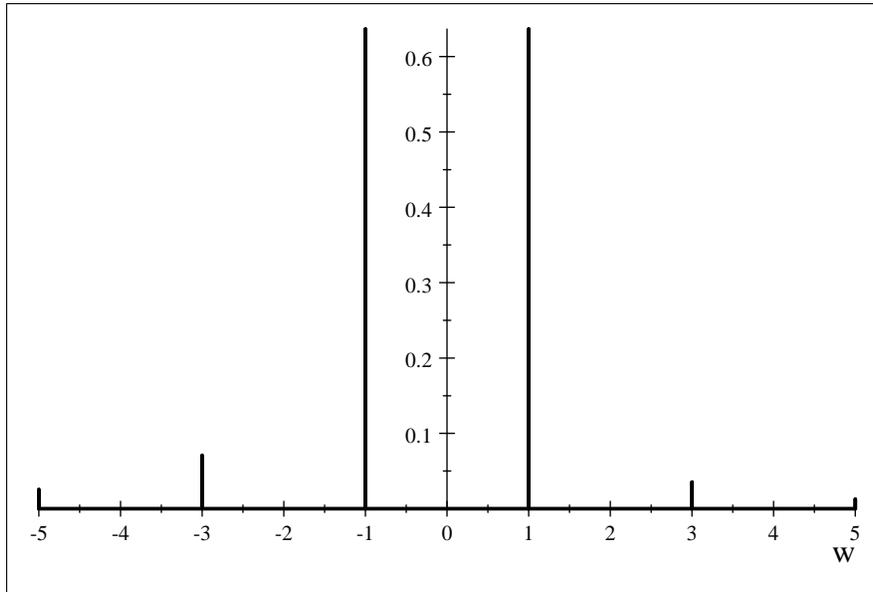
Integrando os dois lados, temos agora uma igualdade:

$$\int_0^x \left(g(x) - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)x}}{(2n-1)^2}$$

Mas, se $x \in [-\pi, \pi]$ a integral do lado esquerdo é a função $G(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } 0 < x < \pi \\ -\frac{x}{2}, & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{|x|}{2}$. Então podemos escrever

$$|x| = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)x}}{(2n-1)^2} \quad (\text{para } x \in [-\pi, \pi])$$

que é a série de Fourier complexa da onda triangular de período 2π que coincide com $|x|$ em $[-\pi, \pi]$.



Espectro da onda triangular

Note como o espectro desta onda tem um decaimento muito mais rápido em w do que o da onda retangular.

TEOREMA 10 (Parseval). Seja $f(x)$ uma função integrável complexa tal que $\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx$ existe. Então

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2$$

onde $\{c_m\}_{-\infty}^{\infty}$ são os coeficientes da série de Fourier complexa de $f(x)$.

IDÉIA DA PROVA. A idéia é que, por um lado

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \overline{f(x)} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx$$

Por outro lado, se pudermos trocar $f(x)$ pela sua série de Fourier complexa:

$$\left\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imw_0 x}, \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imw_0 x} \right\rangle = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \langle c_i \vec{w}_i, c_j \vec{w}_j \rangle = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} c_i \overline{c_j} \langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle$$

Enfim, usando que $\langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ e $\langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle = 1$ quando $i = j$:

$$\langle f(x), f(x) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_j|^2$$

A demonstração acima tem dois grandes furos – o primeiro é que nem sempre $f(x)$ é igual a sua série de Fourier; o segundo é que a propriedade distributiva do produto interno nem sempre vale para somatórios infinitos. No entanto, a demonstração acima contém a **idéia** correta, e preferimos omitir a demonstração formal deste teorema que inclui vários detalhes técnicos. \square

1. Exercícios

1) Na série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

use as substituições $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ e $2i \sin \theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ e rearrange os termos para obter

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw_0}$$

onde $w_0 = \frac{\pi}{L}$. Verifique que a relação entre c_k , a_k e b_k é a mesma obtida de outra forma no texto.

2) Sejam u e v vetores de um espaço vetorial complexo. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, mostre que

$$\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$$

[Dica: use primeiro a anti-simetria para trocar a ordem dos vetores, e depois use a linearidade no primeiro vetor.]

Resposta: basta notar que

$$\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \lambda \overline{\langle v, u \rangle} = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$$

3) Obtenha a série de Fourier complexa de $f(x) = 2 \sin 3x + 4 \cos 5x$.

4) Obtenha as séries de Fourier complexas de $f(x) = \sin^2 x$ e $g(x) = \cos^4 x$. [Dica: se você substituir estas funções trigonométricas pelas suas versões exponenciais complexas, e depois abrir tudo, nenhuma integral será necessária!]

5) Seja $\delta_k(x)$ uma função periódica de período 2π tal que $\delta_k(x) = \begin{cases} k, & \text{se } |x| < \frac{1}{2k} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ (onde k é uma constante positiva maior do que 1).

a) Encontre a série de Fourier complexa de δ_k e esboce seu espectro no domínio da frequência.

b) O que acontece com cada coeficiente c_k à medida que $k \rightarrow \infty$?

Comentário: é comum imaginar que as funções $\delta_k(x)$ se aproximam da função impulso unitário $\delta(x)$. Esta função teria as seguintes propriedades no intervalo $x \in [-\pi, \pi]$: i) $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$; ii) $\delta(0) = +\infty$; iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) dx = 1$ (em outras palavras, aquele infinito em cima do zero tem que ser do tamanho certo para que a "área" embaixo da função $\delta(x)$ seja 1). É claro que não existe uma função real com estas propriedades, mas é possível definir formalmente uma "função generalizada" $\delta(x)$, e, por incrível que pareça, funciona e é útil.

6) a) Suponha que é possível escrever $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$. Calcule $\hat{f}(k)$.

b) Se $f^{(n)}$ é a n -ésima derivada de f e f é periódica de período 2π , verifique que:

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \hat{f}(k)$$

Resposta: a) $\hat{f}(k) = c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$. A idéia é a mesma do texto, com $w_0 = 1$, e usando uma outra notação ($\hat{f}(k)$ ao invés de c_k).

b) O Teorema de Derivação é o caso $n = 1$, mas recomendamos ao leitor obter diretamente esta fórmula usando integração por partes. O caso geral pode ser obtido por indução em n .

7) Considere a E.D.O. : $f' + af = g$, onde g é contínua e periódica de período 2π .

a) Use o exercício anterior para verificar que: $(ik) \hat{f}(k) + a \hat{f}(k) = \hat{g}(k)$.

b) Conclua que $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(k)}{a+ik} e^{ikx}$ é solução da E.D.O.

O Fenômeno de Gibbs

Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$ e considere as somas parciais $S_n(x)$ de sua série de Fourier, isto é

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

Vimos que, quando $f(x)$ não é contínua, a convergência de $S_n(x)$ para $f(x)$ não pode ser uniforme. Além disso, em todos os exemplos que vimos até aqui, apareciam oscilações em $S_n(x)$, oscilações estas que eram especialmente ruins perto da descontinuidade. O aparecimento destas oscilações é chamado de **fenômeno de Gibbs**.

Mais ainda, é notável que a soma parcial $S_n(x)$ parece amplificar a amplitude do salto perto da descontinuidade. Vamos analisar este efeito através do exemplo mais simples de salto: uma onda retangular.

EXEMPLO 27. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ -1 & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$ periódica de período 2π . Como f é ímpar, sua série será em senos

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(mx) dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos(mx)}{m} \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^m}{m}$$

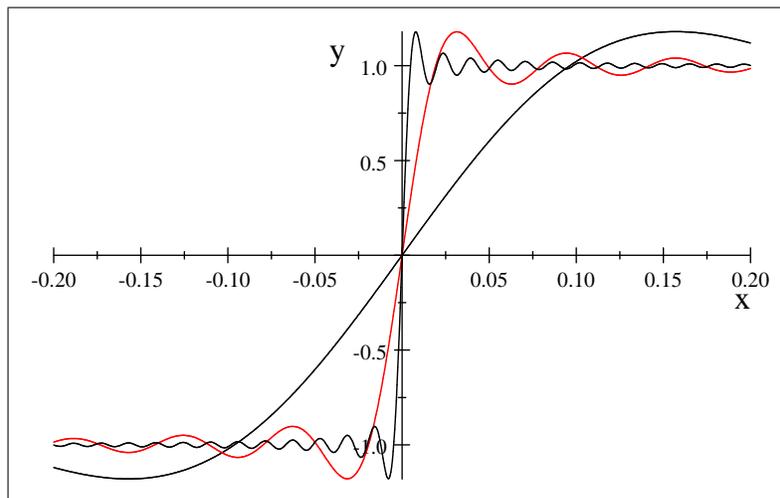
ou seja

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

Analisemos a soma parcial

$$S_{2N-1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2N-1)x}{2N-1} \right)$$

A seguir, mostramos os gráficos de S_{19} , S_{199} e S_{399} para valores de x bem próximos de $x=0$. Além da convergência não ser uniforme, a amplitude da primeira oscilação (a mais próxima de $x=0$) **não parece estar se aproximando do tamanho do salto!** Em outras palavras, a altura do primeiro máximo de $S_N(x)$ não parece estar se aproximando de 1! Este é o fenômeno que desejamos investigar cuidadosamente a seguir.



Calculemos então as coordenadas do ponto onde ocorre este primeiro máximo. Ali, devemos ter

$$S'_N(x) = 0 \Rightarrow \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2N-1)x = 0 \Rightarrow \frac{\sin 2Nx}{2 \sin x} = 0 \Rightarrow \sin(2Nx) = 0$$

onde usamos a "famosa" fórmula da soma dos cossenos de arcos em P.A. (veja exercício 1). Portanto, os extremos locais de S_N ocorrem para $x = \frac{\pi}{2N}$ e seus múltiplos (exceto 0).

Como estamos interessados apenas naquele primeiro máximo local, tomemos $x = \frac{\pi}{2N}$. A altura deste máximo é

$$S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2N} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2N} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2N} + \dots + \frac{1}{2N-1} \sin \frac{(2N-1)\pi}{2N} \right)$$

Como calcular o limite M desta expressão quando $N \rightarrow \infty$? Um novo truque nos ajuda: escreva $x_k = \frac{(2k-1)\pi}{2N}$ onde $k = 1, 2, \dots, N$. Então

$$\begin{aligned} S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2N}}{\frac{\pi}{2N}} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2N}}{3 \cdot \frac{\pi}{2N}} + \frac{\sin \frac{5\pi}{2N}}{5 \cdot \frac{\pi}{2N}} + \dots + \frac{\sin \frac{(2N-1)\pi}{2N}}{(2N-1) \cdot \frac{\pi}{2N}} \right) \frac{\pi}{2N} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin x_1}{x_1} + \frac{\sin x_2}{x_2} + \frac{\sin x_3}{x_3} + \dots + \frac{\sin x_N}{x_N} \right) \frac{\pi}{N} \end{aligned}$$

Enfim, note que os pontos x_k formam uma amostragem uniforme do intervalo $[0, \pi]$ com $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{N}$. Então

$$\frac{\pi}{2} S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \sum_{i=1}^N \frac{\sin x_i}{x_i} \Delta x \Rightarrow \frac{\pi}{2} M = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

usando a definição da Integral de Riemann. Assim, a altura do primeiro máximo se aproxima de

$$M = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

Esta integral não pode ser resolvida usando funções elementares – agora, usando a função Seno Integral

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

fica bem fácil escrever e calcular numericamente

$$M = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1.1790$$

Ou seja, a altura do primeiro máximo local tende a aproximadamente 1.18. Analogamente, o primeiro mínimo local à esquerda de $x = 0$ tende a altura -1.18 . O intervalo $[-1.18, 1.18]$ é chamado de Intervalo de Gibbs da série de Fourier de $f(x)$ no ponto $x = 0$. Assim, o salto, que deveria ser de 2 unidades, acaba sendo de 2.36 – um erro de 18% na estimativa do tamanho do degrau, mesmo quando $N \rightarrow \infty$!

Para terminar, mencionaremos sem demonstração que o erro de 18% não é restrito a este exemplo – em qualquer função que seja a soma de uma função contínua com um degrau (o que inclui todas as funções descontínuas que usaremos), a série de Fourier (quando o número de termos é grande) exagera o tamanho deste degrau em aproximadamente 18%, sendo 9% a mais no degrau mais alto e 9% a menos no degrau mais baixo.

1. Exercícios

1) Deduza a fórmula da soma dos cossenos de arcos em P.A. (para $a \neq 0$):

$$\cos x + \cos(x+2a) + \cos(x+4a) + \dots + \cos(x+2na) = \frac{\sin(x+(2n+1)a) - \sin(x-a)}{2 \sin a}$$

[Dica: a mágica é multiplicar a expressão à esquerda por $2 \sin a$ e depois transformar cada produto em soma.]

2) Considere a função $f(x)$ dente de serra periódica de período 2π tal que $f(x) = x$ para $x \in (-\pi, \pi)$. Qual o valor do salto desta função em $x = \pi$? Em quanto você estima o valor do salto correspondente na soma parcial $S_N(x)$ para N grande perto de $x = \pi$?

3) Encontre uma fórmula simples para

$$\sin x + \sin(x+2a) + \sin(x+4a) + \dots + \sin(x+2na)$$

4) a) Prove que, se $q \neq 1$,

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

b) Escreva cada termo da expressão

$$S = \sum_{k=0}^n \cos(x+2ka)$$

como uma soma de exponenciais complexas. Agora divida a expressão resultante em dois somatórios de exponenciais complexas, e note que cada um é a soma dos termos de uma P.G. Use a fórmula do item (a) e chegue a uma outra expressão simples para S .

Método da Separação de Variáveis

O Método de Separação de Variáveis é um método que permite encontrar soluções de vários Problemas de Valor Inicial ou de Contorno com EDPs. Dado um tal problema, a idéia básica do método é:

- Separe a parte homogênea (H) do seu problema, onde vale o *Princípio da Superposição* (isto é, se u_1 e u_2 são soluções de (H), então $c_1 u_1 + c_2 u_2$ é solução de (H) para quaisquer c_1 e c_2 reais);
- Procure *autosoluções*, isto é, soluções (não-nulas) do sistema (H); no caso do método de Separação de Variáveis para duas variáveis, procuramos soluções do tipo $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Se você der "sorte", encontrará uma família de soluções – tipicamente, $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$
- Pelo princípio da Superposição, qualquer função do tipo $\sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t)$ também será solução de (H); abuse da sua sorte¹ e procure uma solução do tipo $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t)$, calibrando² os coeficientes c_i de maneira a satisfazer as condições do Problema inicial que não estavam em (H). Espera-se assim encontrar uma solução do problema original.

EXEMPLO 28. *Vamos usar o Método da Separação de Variáveis para mostrar que a solução do Problema do Calor*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \text{ para } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) &= f(x) \text{ para } x \in (0, \pi) \end{aligned}$$

é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

são os coeficientes da série de Fourier em senos de $f(x)$.

Em primeiro lugar, vamos nos concentrar na parte homogênea do sistema (tipicamente, uma EDP linear e condições de contorno nulas). Assim, inicialmente vamos trabalhar com:

$$(0.1) \quad \begin{aligned} u_t &= u_{xx} \text{ para } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty) \end{aligned} \quad ((H))$$

Por separação de variáveis, vamos procurar funções do tipo $u(x, t) = X(x)T(t)$ que satisfaçam a EDP acima. Teríamos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

Como o lado esquerdo não depende de t e o direito não depende de x , somos forçados a concluir que ambos os lados são constantes, digamos, λ . Assim, temos as seguintes EDOs

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x) \\ T'(t) &= \lambda T(t) \end{aligned}$$

Por outro lado, as condições de contorno nos dão

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$$

Como não estamos interessados em $T(t)$ identicamente nula (pois aí seria $u(x, t) = X(x)T(t) = 0$, uma solução nula que não nos interessa), somos forçados a concluir que

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

¹É claro que, em determinadas situações, há teoremas que garantem que esta passagem ao infinito funciona. Citaremos algumas destas explicitamente, e aí não precisaremos da "sorte".

²Se os u_i forem funções trigonométricas convenientes, os c_i serão os coeficientes de uma série de Fourier.

Neste momento, vamos separar nossa análise em 3 casos, dependendo do sinal de λ :

Caso 1: λ positivo. Então a solução da EDO em X é

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

o que, juntando com as condições $X(0) = X(\pi) = 0$ nos daria

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ Ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{-\sqrt{\lambda}\pi} &= 0 \end{aligned}$$

Este é um sistema linear possível determinado em A e B , então a única solução é $A = B = 0$. Mas então $X(x) \equiv 0$, o que de novo não nos interessa (não queremos $u(x, t) \equiv 0$).

Caso 2: $\lambda = 0$. Neste caso, a solução da EDO em X é

$$X(x) = A + Bx$$

o que, juntando com as condições de contorno, nos dá

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ A + B\pi &= 0 \end{aligned}$$

e, novamente, $A = B = 0$, que não presta de novo.

Caso 3: λ negativo. Então, colocando $w = \sqrt{-\lambda}$ para facilitar a notação:

$$X(x) = A \cos(wx) + B \sin(wx)$$

e, juntando com $X(0) = X(\pi) = 0$

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ A \cos(w\pi) + B \sin(w\pi) &= 0 \end{aligned}$$

O único jeito de evitar mais uma solução idênticamente nula é tomar $B \neq 0$ e $\sin(w\pi) = 0$, isto é, $w = n \in \mathbb{Z}$. Mas, neste caso, B pode ser qualquer número real!

Assim, só temos soluções não-nulas se $\lambda = -w^2 = -n^2$ onde $n \in \mathbb{Z}$ - tais possíveis valores de λ são chamados autovalores do sistema. Teríamos então

$$X_n(x) = B \sin(nx)$$

e, como $T'(t) = \lambda T(t)$, então

$$T_n(t) = Ke^{\lambda t} = Ke^{-n^2 t}$$

Juntando tudo, encontramos uma família de soluções do sistema (H) da forma³

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = cte. \left(e^{-n^2 t} \sin(nx) \right) \text{ onde } n = 1, 2, 3, \dots$$

(estas são as autofunções deste sistema). Pelo princípio da superposição, temos a esperança⁴ de que isto implique na existência de soluções do tipo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

Enfim, quem seriam os coeficientes c_n ? Tomando $t = 0$, temos

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = f(x)$$

portanto, os coeficientes são os que aparecem na série de $f(x)$ em senos. Sabemos que isto significa que

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

O teorema abaixo (que não demonstraremos) generaliza algumas das constantes utilizadas e confirma a solução obtida acima⁵ (justificando os "somatórios infinitos"):

³Tomar $n = 0$ mais uma vez gera uma solução idênticamente nula; e trocar o sinal de n simplesmente troca u_n por $-u_n$, que é essencialmente a mesma solução apenas trocando o sinal da constante multiplicativa. Assim, nada é perdido ao tomar n natural positivo.

⁴Mais uma vez, destacamos que isto poderia não funcionar - o princípio da superposição garante que combinações lineares **finitas** de soluções ainda são soluções; neste caso estamos usando um somatório infinito. Por outro lado, se este somatório infinito puder ser diferenciado termo a termo, o método funciona.

⁵Além disso, mais tarde mostraremos que a solução $u(x, t)$ aqui apresentada é a **única** solução deste sistema.

TEOREMA 11. *Seja $f(x)$ uma função integrável com domínio $(0, L)$ e α uma constante positiva⁶. Então a série*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\alpha \frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\text{onde } c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

converge uniformemente para uma função infinitamente diferenciável sempre que $t > 0$, e pode ser diferenciada termo-a-termo. Assim, esta série satisfaz o seguinte Problema do Calor com condições de contorno

$$u_t = \alpha u_{xx} \text{ para } (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ para } t > 0$$

Enfim, se f for seccionalmente suave,

$$u(x, 0) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \text{ para } x \in (0, L)$$

Em particular, se f for contínua, tem-se

$$u(x, 0) = f(x) \text{ para } x \in (0, L)$$

Note uma curiosa propriedade desta solução: mesmo que $f(x)$ tenha saltos ou bicos, a solução $u(x, t)$ será contínua e suave para qualquer $t > 0$. Ou seja, a solução $u(x, t)$ **suaviza instantaneamente** a condição inicial $f(x)$ (para qualquer t positivo, por menor que seja), até nos extremos da barra.

EXEMPLO 29. *Encontremos um exemplo explícito de solução do Problema*

$$u_t = u_{xx} \text{ para } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty)$$

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \text{ para } x \in (0, \pi)$$

Calculando a série de Fourier em senos de $f(x)$, após algum trabalho, encontramos

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m} \left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right) \sin(mx) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \sin 2x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{3} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 10x}{5} + \frac{\sin 11x}{11} + \frac{\sin 13x}{13} + \dots \right)$$

Então a solução do sistema

$$u_{xx} = u_t \text{ para } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty)$$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ para } x \in (0, \pi)$$

é

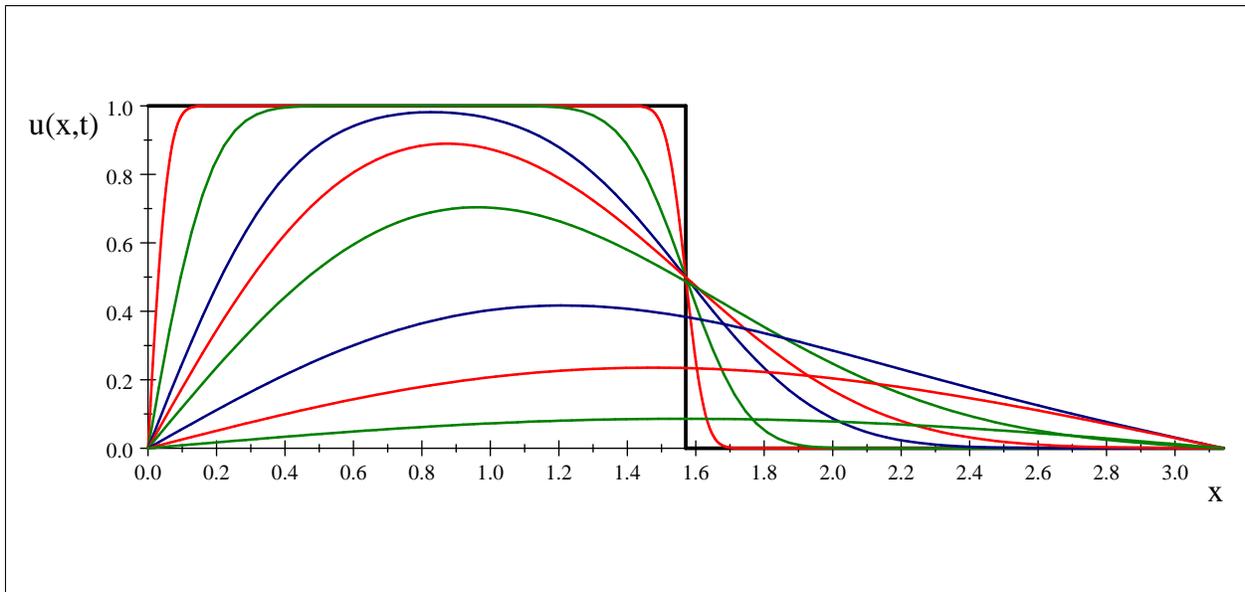
$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m} \left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right) e^{-m^2 t} \sin(mx) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(e^{-t} \sin x + e^{-4t} \sin 2x + e^{-9t} \frac{\sin 3x}{3} + e^{-25t} \frac{\sin 5x}{5} + e^{-36t} \frac{\sin 6x}{3} + e^{-49t} \frac{\sin 7x}{7} + e^{-81t} \frac{\sin 9x}{9} + \dots \right)$$

No gráfico abaixo⁷, plotamos esta solução para vários valores de t (para ser exato, $t = 0; 0.001; 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.5; 1$ e 2). Note a suavização "instantânea" dos saltos da condição inicial, e a queda "instantânea" da temperatura do bordo esquerdo para 0.

⁶No caso da Equação do Calor como modelo físico para a temperatura de uma barra homogênea, a constante α que aparece em $u_t = \alpha u_{xx}$ é chamada *condutividade térmica* do material do qual a barra é feita.

⁷Veja "filmes" no site!



Não é nenhuma surpresa que $u(x,t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Aliás, mais ainda, note que para t grande, $u(x,t) \simeq \frac{2}{\pi} e^{-t} \sin x$ (os outros termos tem os coeficientes exponenciais muito muito muito pequenos!). Em outras palavras, para t grande, o gráfico de $u(x,t)$ (em função de x) se assemelha a uma senóide cuja frequência é a frequência fundamental do sinal original⁸.

Vale a pena notar que não citamos nada ainda sobre a unicidade da solução – mais tarde veremos que a solução $u(x,t)$ aqui apresentada é, em geral, a **única** solução deste sistema.

1. Exercícios

1) Encontre todas as soluções da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ para as seguintes EDPs:

- $x^2 u_{xx} + u_{yy} = 0$
- $u_{xx} - 2u_x + 3u_{yy} = 0$
- $u_{xx} + u_{yy} - 2u = 0$

2) São dadas uma constante $\alpha > 0$ e uma função $f(x)$ com domínio $(0, L)$. Utilize o Método da Separação de Variáveis para resolver o PVC do Calor com condições de contorno adiabáticas (isto é, as extremidades da barra estão isoladas):

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} \text{ para } (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \text{ para } t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } x \in (0,L) \end{cases}$$

Em particular, conclua que, quando $t \rightarrow \infty$, a temperatura da barra se aproxima de uma constante, que é a temperatura média da barra quando $t = 0$.

Resposta: $u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \alpha t}{L^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ onde $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

3) Considere o problema do Calor:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ para } t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ para } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Encontre a solução explicitamente por separação de variáveis, nos seguintes casos:

- $f(x) = \sin x$.
- $f(x) = \sin^3 x$.
- $f(x) = x(\pi - x)$.

Respostas: a) $u(x,t) = e^{-t} \sin x$; b) $u(x,t) = (3e^{-t} \sin x - e^{-9t} \sin 3x)/4$; c) $u(x,t) = \sum_{n=1:2}^{\infty} \frac{8}{\pi n^3} e^{-n^2 t} \sin nt$

4) [adaptado de Boyce-de Prima] Uma barra homogênea de $L = 50\text{cm}$ de comprimento está inicialmente a uma temperatura constante de 100°C . A seguir, sua superfície lateral é isolada e suas extremidades são mergulhadas em

⁸Aliás, como o máximo do primeiro harmônico $\sin x$ está em $x = \frac{\pi}{2}$, isto praticamente mostra que o ponto mais quente da barra se aproximará do centro da barra à medida que $t \rightarrow \infty$.

gelo (a $0^{\circ}C$). Encontre a temperatura em seu ponto médio após 30 minutos, supondo que (i) o material da barra é concreto; (ii) o material da barra é ferro.

Dados: condutividade térmica destes materiais: $\alpha_{\text{concreto}} = 0.005 \text{cm}^2/\text{s}$; $\alpha_{\text{ferro}} = 0.15 \text{cm}^2/\text{s}$.

Resposta: (i) Aproximadamente $100.00^{\circ}C$; (ii) Aproximadamente $43.85^{\circ}C$.

5) Repita o exercício (3) resolvendo agora o seguinte problema de Onda:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ para } t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ para } 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0 \text{ para } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Encontre explicitamente a solução por separação de variáveis usando cada uma das condições iniciais $f(x)$ daquele exercício.

Respostas: a) $u(x, t) = \cos t \sin x$; b) $u(x, t) = (3 \cos t \sin x - \cos 3t \sin 3x) / 4$. c) $u(x, t) = \sum_{n=1:2}^{\infty} \frac{8}{\pi n^3} \cos nt \sin nx$

6) Repita o exercício (2) trocando as condições de contorno por

$$u(0, t) = u_x(L, t) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty)$$

Resposta:

$$u(x, t) = \sum_{n=1:2}^{\infty} b_n \exp\left(-\alpha \frac{n^2 \pi^2}{4L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right)$$

onde $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2L} x\right) dx$ apenas para n ímpar

7) a) Utilize o Método da Separação de Variáveis para resolver o seguinte PVC da Equação da Onda (que representa o movimento de uma corda com extremidades fixas, *largada* a partir de um estado inicial $f(x)$):

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ para } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \text{ para } x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = 0 \text{ para } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Em particular, mostre que quando $t = \frac{2\pi}{c}$, a corda volta ao estado inicial.

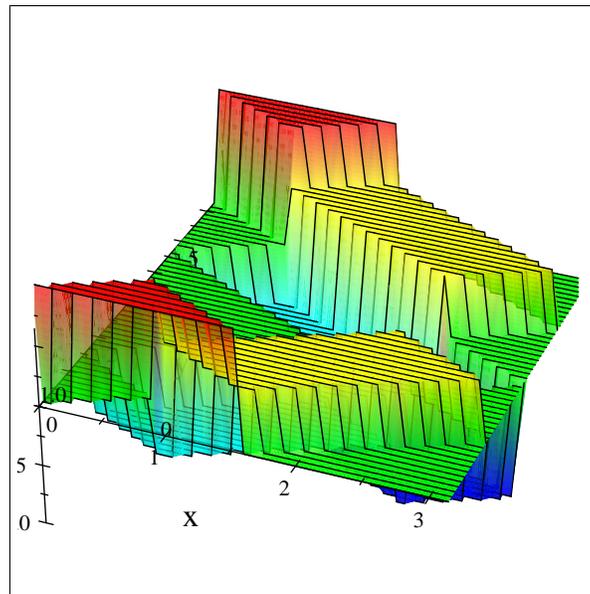
b) Determine explicitamente esta solução no caso em que $c = 1$ e $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$.

Respostas: a) $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(cnt) \sin(nx)$ onde $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$. Como $\cos(cnt)$ tem período $\frac{2\pi}{c}$, temos $u(x, t + \frac{2\pi}{c}) = u(x, t)$, isto é, a corda repete seu movimento a cada $\frac{2\pi}{c}$ unidades de tempo.

b) A série em senos $f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m} (1 - \cos(\frac{m\pi}{2})) \sin mx$ está no texto do capítulo. Então:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m} \left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right) \cos(mt) \sin(mx) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\cos t \sin x + \cos 2t \sin 2x + \cos 3t \frac{\sin 3x}{3} + \cos 5t \frac{\sin 5x}{5} + \cos 6t \frac{\sin 6x}{3} + \cos 7t \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right) \end{aligned}$$

cujo gráfico pode ser feito usando as técnicas do capítulo 14:

Gráfico de $u(x, t)$

8) Dada uma função $g(x)$ com domínio $(0, \pi)$, use o método da separação de variáveis para resolver formalmente o seguinte problema da Onda (agora a corda tem extremidades fixas e sua posição inicial é reta, mas há uma velocidade inicial $g(x)$):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0 \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ para } t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 0 \text{ para } 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) &= g(x) \text{ para } 0 < x < \pi \end{aligned}$$

Resposta: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nt \sin nx$ onde $c_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx$.

9) Resolva por separação de variáveis a seguinte "variante" da Equação do Calor:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} - u &= 0 \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0 \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -a, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \end{aligned}$$

Resposta:

$$u(x, t) = \sum_{n=2:4}^{\infty} \frac{8a}{\pi n} e^{(1-n^2)t} \sin(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8a}{\pi(4k+2)} e^{(1-(4k+2)^2)t} \sin((4k+2)x)$$

10) Resolva por separação de variáveis a seguinte Equação do Potencial

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } 0 < y < L \\ u(0, y) &= u(\pi, y) = 0 \text{ para } 0 < y < L \\ u(x, 0) &= 0 \text{ e } u(x, L) = x(\pi - x) \text{ para } 0 < x < \pi \end{aligned}$$

Resposta: $u(x, y) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1:2}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{e^{nL} - e^{-nL}} \sin nx = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1:2}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{\sinh ny}{\sinh nL} \sin nx$.

A Equação da Onda (Primeira Ordem)

Dada uma constante c e uma função $f(x)$, vamos tentar determinar $u(x, t)$ que satisfaz o problema¹:

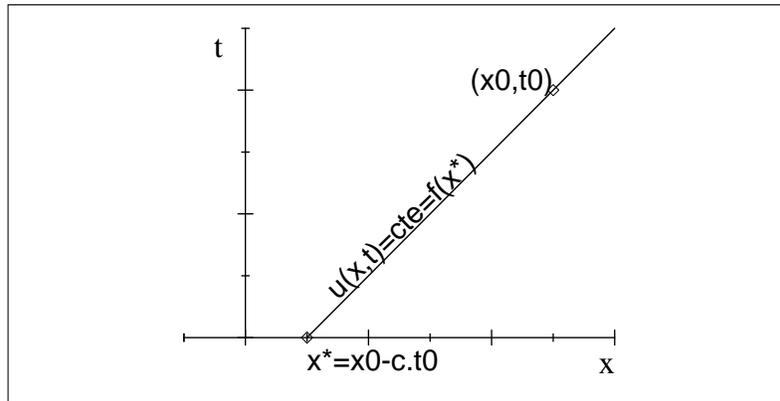
$$(0.1) \quad \begin{aligned} u_t + cu_x &= 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Observe que a primeira equação de 0.1 pode ser reescrita como:

$$\nabla u(x, t) \cdot (c, 1) = 0$$

Concluimos imediatamente que o gradiente de u é ortogonal ao vetor constante $(c, 1)$ e, portanto, a derivada direcional de u em qualquer ponto (x, t) na direção de $(c, 1)$ vale 0. Logo, u é constante nesta direção. Em outras palavras, as curvas com vetor tangente $(c, 1)$, são curvas de nível de u . Observe que curvas cujo vetor tangente é constante são retas e, neste caso, retas com equação $x - ct = \text{constante}$. Estas retas são chamadas de *curvas características do problema 0.1*.

Considere, portanto, o plano $x \times t$ (domínio de u) desenhado na figura. Fixe um ponto (x_0, t_0) e considere a reta $r := \{(x, t) \text{ tais que } x - ct = x_0 - ct_0\}$. Isto é, r é a reta com direção $(c, 1)$ contendo o ponto (x_0, t_0) . Já vimos que u é constante ao longo de r . Mas r intercepta o eixo $t = 0$ em $x^* = x_0 - ct_0$. Portanto, como $u(x, t)$ é constante ao longo da reta r , em cada ponto (x, t) de r , $u(x, t) = u(x^*, 0)$. Mas $u(x^*, 0)$ é dado na condição inicial do problema. Assim, concluimos que $u(x, t) = f(x^*) = f(x - ct)$.



COMENTÁRIO 1. Outra maneira de chegar ao mesmo resultado é a seguinte: considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} y &= x - ct \\ w &= t \end{aligned}$$

Então, usando a Regra da Cadeia²

$$\begin{aligned} u_x &= u_y y_x + u_w w_x = u_y \\ u_t &= u_y y_t + u_w w_t = -cu_y + u_w \end{aligned}$$

Jogando tudo na EDP original $u_t + cu_x = 0$, vem $u_w = 0$. Assim, u depende apenas da variável y , isto é

$$u(x, t) = F(y) = F(x - ct)$$

¹A equação $u_t + cu_x = 0$ é também chamada de *Equação de Transporte* ou *Equação de Convecção*. A equação da onda propriamente dita será estudada na aula seguinte. Começamos por este modelo pois ele contém vários dos princípios e idéias dos modelos mais complexos.

²Tecnicamente, estamos usando a letra u para representar duas funções distintas; uma é a $u(x, t)$ da equação original; a outra seria uma nova função $v(y, w)$ relacionada a u pela mudança de coordenadas $u(x, t) = v(y, w)$, isto é,

$$u(x, t) = v(x - ct, t) \text{ ou } v(y, w) = u(y + cw, w)$$

Assim, para ser exato, onde estão escritas as derivadas u_y e u_w (que não fazem muito sentido, já que u é uma função de x e t), estamos de fato calculando as derivadas v_y e v_w . Isto dito, é comum representar ambas as funções pela mesma letra pois, em geral, elas representam a mesma grandeza.

Enfim, para descobrir quem é a função F , basta substituir $t = 0$ e usar a condição inicial

$$u(x, 0) = F(x) = f(x)$$

ou seja, a função F é, de fato, a função $f(x)$ da condição inicial. Juntando tudo, chegamos novamente à solução

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

É importante notar que ambos os raciocínios acima mostram que, **se houver alguma solução de 0.1**, ela é da forma $u(x, t) = f(x - ct)$. Falta verificar a volta: se $u(x, t) = f(x - ct)$, então u satisfaz 0.1? Em outras palavras, $u(x, t) = f(x - ct)$ é de fato a solução? Se f for diferenciável, é fácil verificar que, se $u(x, t) = f(x - ct)$, então

$$\begin{aligned} u_x &= f'(x - ct) \text{ e } u_t = -cf'(x - ct) \Rightarrow u_t + cu_x = 0 \\ u(x, 0) &= f(x - c \cdot 0) = f(x) \end{aligned}$$

e, assim, esta solução serve. Por outro lado, *mesmo que f não seja diferenciável*, a solução encontrada acima é comumente aceita como a "melhor" solução de 0.1 (mesmo que u_x ou u_t não existam em alguns pontos, onde a equação $u_t + cu_x = 0$ não faria sentido). Por este motivo, quando f não é diferenciável, diz-se que $u(x, t) = f(x - ct)$ é uma **solução fraca de 0.1**.

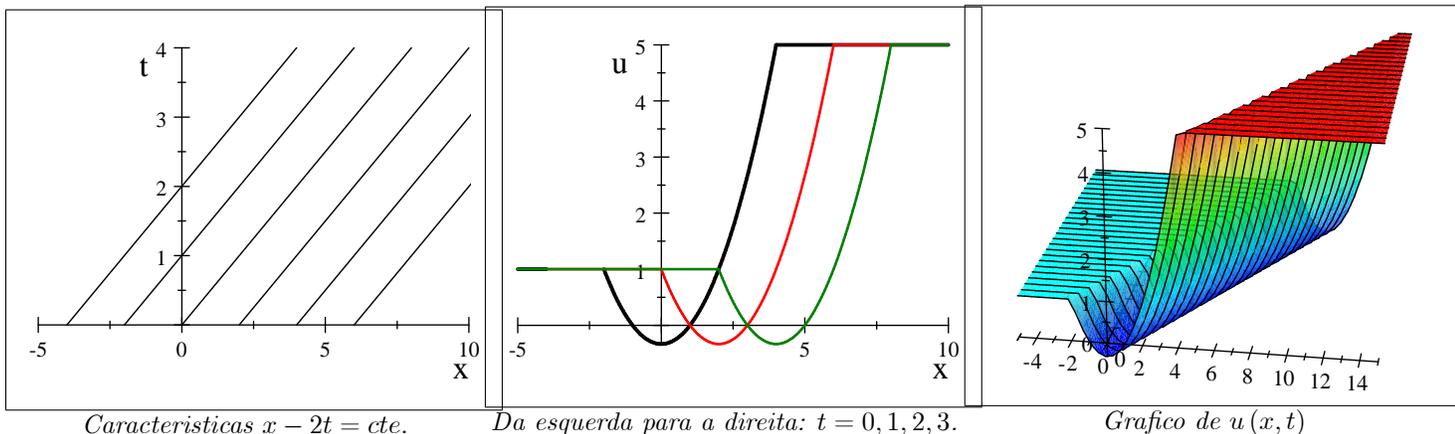
EXEMPLO 30. Considere

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x &= 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -2 \\ \frac{x^2-1}{3}, & -2 < x \leq 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Acompanhando o raciocínio para o caso geral, vemos que u é constante ao longo das retas $x - 2t = \text{constante}$. Para o ponto (x_0, t_0) indicado na figura acima, vemos que $u(x_0, t_0) = f(x_0 - 2t_0)$. Em outras palavras, a solução é

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x - 2t \leq -2 \\ \frac{(x-2t)^2-1}{3} & \text{se } -2 < x - 2t \leq 4 \\ 5 & \text{se } x - 2t > 4 \end{cases}$$

As figuras seguintes esboçam (i) as curvas características deste problema no plano xt , (ii) a solução para vários valores distintos de t no plano ux e (iii) o gráfico da solução $u(x, t)$ no espaço xtu . Aprenda a distinguir e entender cuidadosamente cada um destes gráficos! Em particular, note como as características determinam as "zonas de dependência da solução" - uma pequena perturbação na condição inicial (digamos, próxima a $x = -2$ quando $t = 0$) viajará ao longo da curva característica, e só afetará a solução em $x = 8$ quando $t = \frac{8-(-2)}{2} = 5$. Em outras palavras, as ondas viajam para a direita com velocidade $c = 2$.



Também vale a pena notar que $u(x, t)$ não é diferenciável nos pontos da reta $x - ct = -2$ nem nos pontos da reta $x - ct = 4$. Ainda assim, esta é a solução tipicamente aceita ("solução fraca") do sistema acima.

1. Exercícios

1) Resolva cada um dos problemas a seguir, esboçando suas curvas características no plano xt e seus gráficos no plano xu para alguns valores positivos de t .

$$\text{a) } \begin{cases} u_t + 3u_x = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = x^3 + 2x \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_t - 2u_x = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = e^x \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Respostas parciais: a) $u(x, t) = (x - 3t)^3 + 2(x - 3t)$. b) $u(x, t) = e^{x+2t}$.

2) No primeiro problema do exercício anterior introduziu-se uma perturbação na condição inicial em $x = 0$. Uma pessoa posicionada em $x = 33$ demorará quanto tempo para perceber a perturbação? E se a perturbação for introduzida no segundo problema?

Respostas: a) Demorará 11 unidades de tempo; b) A perturbação nunca chega a $x = 33$.

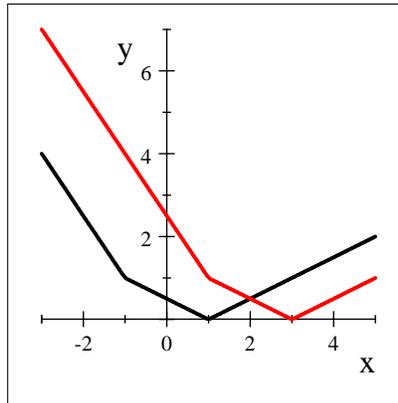
3) Esboce as curvas características do problema a seguir no plano xt e marque neste mesmo plano a localização da reta onde a condição de contorno está definida. Em seguida, resolva o problema.

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R} \\ u(s, 2s + 1) = 3s^2 \text{ para } s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resposta: $u(x, t) = \frac{(x-2t+2)^2}{3}$.

4) Esboce no plano ux gráficos da solução fraca de $\begin{cases} u_t + 2u_x = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = \left| x - \frac{|x+1|}{2} \right| \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$ para vários valores distintos de t .

Resposta parcial: $t = 0$ é o da esquerda, $t = 1$ é o da direita:



A Equação da Onda (Segunda Ordem)

Agora estamos prontos para analisar a equação da onda propriamente dita, pelo menos no caso em que o ambiente é unidimensional¹. As equações

$$(0.1) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u; & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

modelam o movimento de uma onda inicialmente com distribuição f e velocidade g (onde c é a velocidade de propagação da onda neste no meio ambiente considerado). Quando $n = 3$, essas equações retratam o movimento de uma onda do mar, ou de ondas sonoras. Para $n = 1$, modelam o deslocamento de uma corda vibrante. Neste curso, só estudaremos o caso $n = 1$ e portanto estamos interessados em:

$$(0.2) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Agora, a equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, pode ser reescrita formalmente da forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \text{ ou } \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$$

Em particular, funções que satisfaçam $\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$ (isto é, da forma $u(x, t) = f(x \mp ct)$, como vimos na aula anterior) devem resolver esta equação. Estas considerações sugerem a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

Fazendo $v(\xi, \eta) = u(x, t)$ e assumindo que u é de classe C^2 , obtemos que v satisfaz $v_{\xi\eta} = 0$ e portanto que $v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$, para um par de funções F, G . Assim,

$$(0.3) \quad u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

é um candidato a solução de (0.2). Para que de fato seja solução, temos que ter:

$$\begin{cases} f(x) = u(x, 0) = F(x) + G(x) \\ g(x) = u_t(x, 0) = F'(x) - cG'(x) \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} F'(x) = cf'(x) + g(x) \\ G'(x) = cf'(x) - g(x) \end{cases}$$

e, logo, integrando de 0 a x :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy + C_1 \\ G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy + C_2 \end{cases}$$

Substituindo em (0.3), temos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= C_1 + \frac{f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(y) dy + C_2 + \frac{f(x-ct)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(y) dy = \\ &= C_1 + C_2 + \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy \end{aligned}$$

¹Este capítulo e o próximo são simplificações para o caso em que a variável espacial é unidimensional, do material sobre problemas hiperbólicos contido no livro John, Fritz - *Partial Differential Equations*.

em particular, $u(x, 0) = C_1 + C_2 + f(x)$ e portanto, usando a segunda equação de (0.2), temos que $C_1 + C_2 = 0$ e conseqüentemente,

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy$$

é um candidato a solução de (0.2).

Falta agora a volta: será que esta fórmula nos dá uma solução? Para tanto, temos o seguinte teorema, cuja demonstração simples é deixada como exercício.

TEOREMA 12 (Fórmula de d'Alembert). *Se $f \in C^2$ e $g \in C^1$, então*

$$(0.4) \quad u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy$$

satisfaz as equações (0.2).

EXEMPLO 31. *Encontre a solução de*

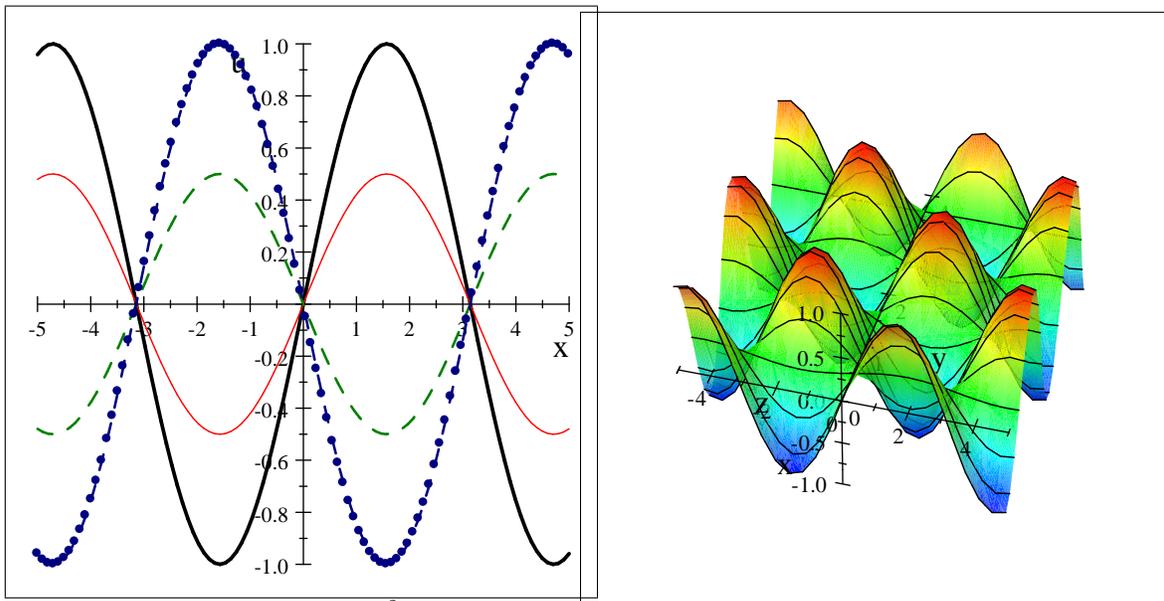
$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Jogando tudo na fórmula de d'Alembert, temos diretamente (note que $c = 3$):

$$u(x, t) = \frac{\sin(x+3t) + \sin(x-3t)}{2}$$

Olhando a solução escrita desta forma, vemos duas senóides de amplitude $\frac{1}{2}$ cada, uma viajando para a esquerda com velocidade 3 e a outra para a direita com velocidade 3. No entanto, a solução é a superposição destas duas ondas. Se reescrevermos a solução abrindo aqueles senos

$$u(x, t) = \sin x \cos 3t$$



$u(x, t)$ para $t = 0, \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}$

Solução para $-5 \leq x \leq 5$ e $0 \leq t \leq 4$.

vemos que a solução é sempre uma senóide em x , com amplitude $\cos 3t$. Assim, o que "vemos" é uma senóide de frequência fixa, cuja amplitude oscila rapidamente entre 1 e -1 .

1. Soluções Fracas

No problema da onda, muitas vezes estamos interessados em soluções não clássicas (isto é soluções que não sejam de classe C^2). Assim, dizemos que a fórmula de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy$$

é uma solução fraca de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x); & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x); & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

mesmo quando $f \notin C^2$ ou $g \notin C^1$.

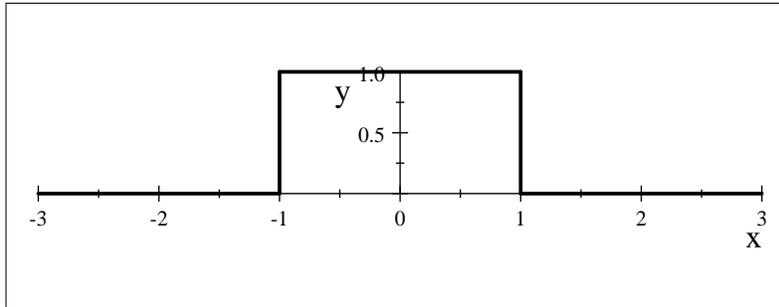
EXEMPLO 32. Vamos obter uma solução fraca de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0; & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1; & |x| \leq 1 \\ 0; & |x| > 1 \end{cases} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Usando a fórmula de d'Alembert, temos imediatamente a solução

$$u(x, t) = 0 + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x) dx$$

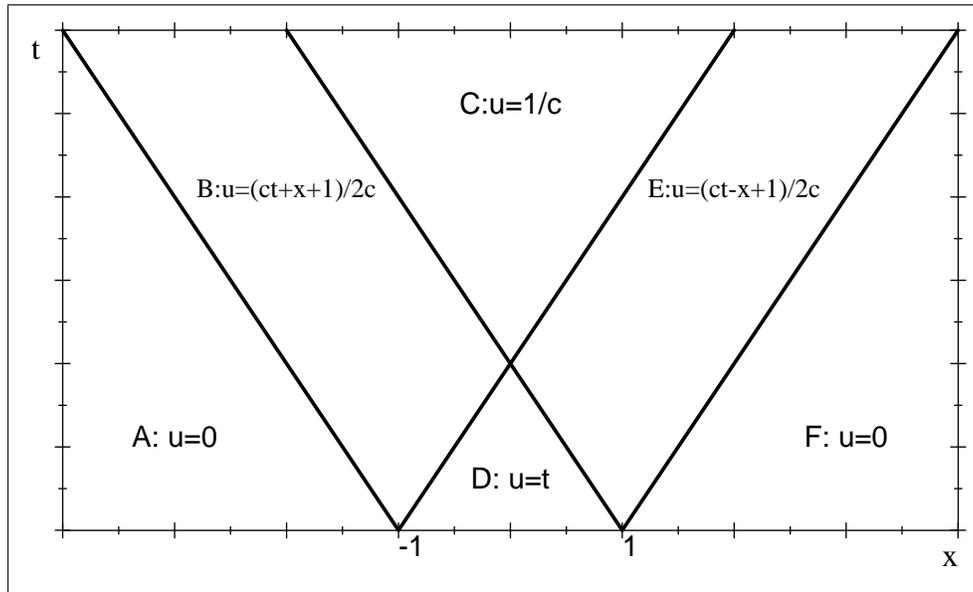
O problema é, como calcular corretamente a integral de $g(x)$ acima? O gráfico de $g(x)$ é simples:



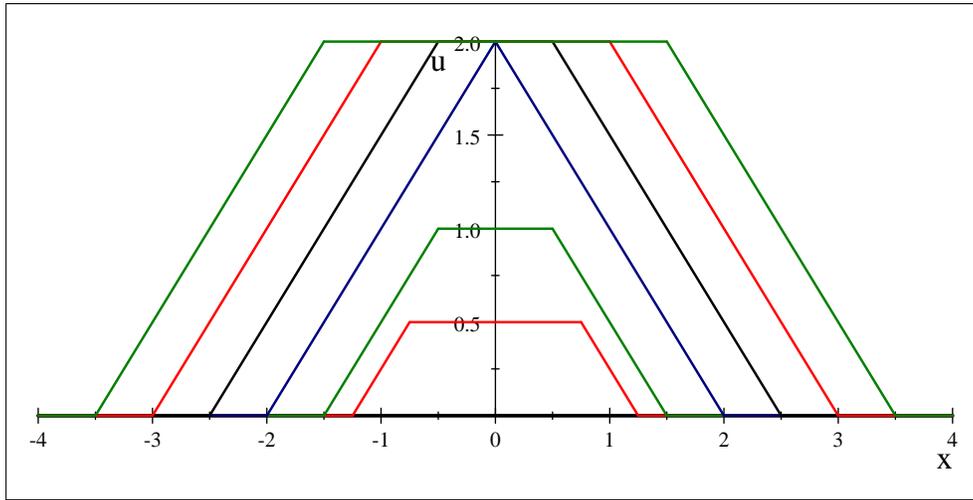
mas os limites de integração dependem de x e t . Para fazer a conta, precisamos abrir os seguintes casos:

- CASO A: $x - ct \leq x + ct \leq -1$. O intervalo de integração está à esquerda de -1 , então $u(x, t) = 0$.
- CASO B: $x - ct \leq -1 \leq x + ct \leq 1$. Então a integral é $\int_{-1}^{x+ct} 1 dx$, e $u(x, t) = \frac{x+ct+1}{2c}$.
- CASO C: $x - ct \leq -1 < 1 \leq x + ct$. Então a integral toma a área toda sob o gráfico de $g(x)$, e $u(x, t) = \frac{1}{c}$.
- CASO D: $-1 \leq x - ct \leq x + ct \leq 1$. Então a integral é $\int_{x-ct}^1 1 dx = 2ct$ e $u(x, t) = t$.
- CASO E: $-1 \leq x - ct \leq 1 \leq x + ct$. A integral é $\int_{x-ct}^1 1 dx$ e $u(x, t) = \frac{1-x+ct}{2c}$.
- CASO F: Enfim, se $1 \leq x - ct \leq x + ct$, então a integral se anula, e $u(x, t) = 0$ de novo.

Estes casos todos podem ser ilustrados no plano xt abaixo:



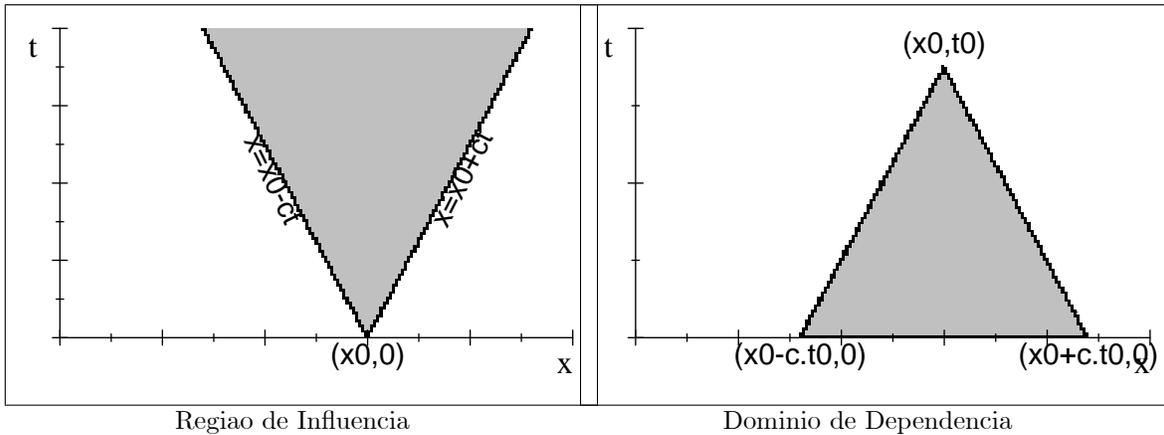
Observe que a solução obtida é de classe C^2 exceto nas semiretas $x \pm ct = \pm 1, t > 0$ e de classe C^0 em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. Os gráficos a seguir ilustram esta solução para diversos valores de t .



No platô central das soluções a velocidade de subida é 1, enquanto nas partes inclinadas a onda sobe com velocidade $\frac{1}{2}$. De certa forma, o intervalo $[-1, 1]$ que inicialmente subia com velocidade 1 "puxa" os seus vizinhos, que sobem com velocidade menor; por outro lado, tais vizinhos "seguram" uma parte cada vez maior do intervalo $[-1, 1]$. até que, para $t = \frac{1}{c}$, não há mais pontos subindo com velocidade 1 e o platô central pára de subir. A partir daí, tudo que se vê é um movimento horizontal de duas frentes de onda, uma para cada lado.

O exemplo acima ilustra duas propriedades importantes da equação da onda:

- (1) O ponto $(x_0, 0)$ influencia a região (chamada de sua *região de influência*) $\{(x, t) \mid x_0 - ct \leq x \leq x_0 + ct, t > 0\}$ (veja a figura abaixo).
- (2) O valor de u no ponto (x_0, t_0) depende de seus valores no triângulo, chamado de *domínio de dependência*, $\{(x, t); x_0 - ct_0 \leq x - ct; x + ct \leq x_0 + ct_0; t \geq 0\}$ (veja a figura abaixo)



2. Exercícios

1) Mostre que, se $f \in C^2$ (isto é, $f''(x)$ existe e é contínua) e $g \in C^1$ (isto é, $g'(x)$ existe e é contínua) então a fórmula de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy$$

dá uma solução do problema da onda com condições iniciais

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x); & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x); & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2) Encontre a solução $u(x, t)$ (e o seu valor máximo) para o problema da onda

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x); & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x); & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

em cada um dos seguintes casos:

a) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 1$;

b) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = c \cos x$;

c) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = k \sin x$;

Respostas: a) $u(x, t) = \sin x \cos ct + t$ não tem máximo; b) $u(x, t) = \sin(x + ct)$ tem valor máximo 1; c) $u(x, t) = \sin x (\cos ct + \frac{k}{c} \sin ct) = \frac{\sqrt{c^2+k^2}}{c} \sin x \cos(ct - \alpha)$ onde $\alpha = \arctan \frac{k}{c}$ tem amplitude máxima $\frac{\sqrt{c^2+k^2}}{c}$.

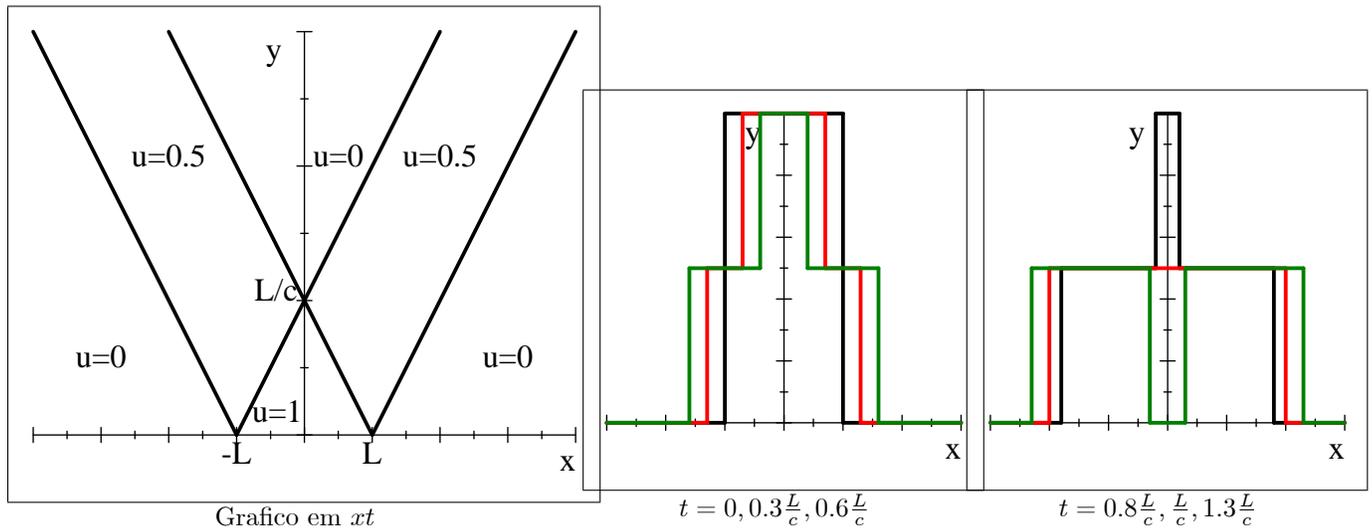
3) Encontre a solução fraca do seguinte Problema de Valor Inicial da Onda, esboce-a no plano xt e esboce-a no plano xu para vários valores distintos de t .

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}; & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq L \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0; & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resposta:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } |x + ct| \leq L \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } |x - ct| \leq L \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

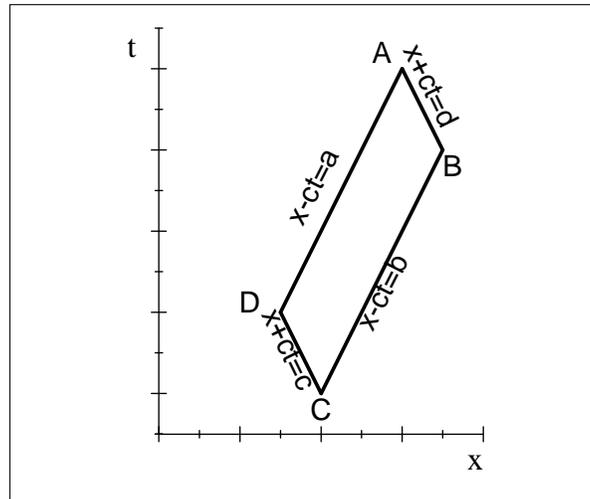
ou seja, $u(x, t)$ é simplesmente a superposição de dois pulsos quadrados, ambos com largura $2L$ e altura $\frac{1}{2}$, viajando em direções opostas com velocidade c . Note que, para $t \geq \frac{L}{c}$, os pulsos podem ser claramente identificados (não havendo mais a interferência da superposição)



A Regra do Paralelogramo e a Corda Finita

Se $u(x, t)$ satisfaz a EDP da onda, então $u(x, t)$ obedece à seguinte importante propriedade:

LEMA 1 (Regra do "Paralelogramo"). *Seja $u(x, t)$ uma função que satisfaz $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Se A, B, C e D são vértices consecutivos do paralelogramo cujos lados pertencem às retas $x - ct = a, x - ct = b, x + ct = c$ e $x + ct = d$, com $a < b < c < d, t > 0$ então $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$.*



PROOF. Lembremos que, via uma mudança de variáveis, temos que $u_{tt} = c^2 u_{xx} \Rightarrow u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ onde F e G são funções de uma variável cada. Então

$$u(A) = F(d) + G(a)$$

$$u(B) = F(d) + G(b)$$

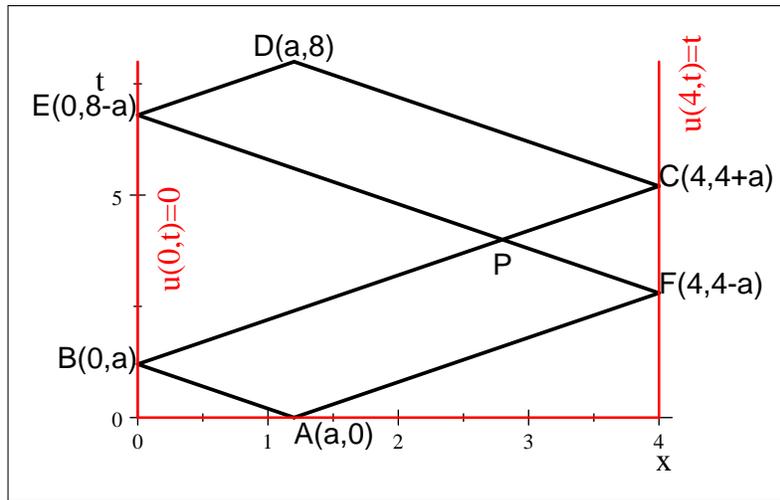
$$u(C) = F(c) + G(b)$$

$$u(D) = F(c) + G(a)$$

o que demonstra o resultado¹. □

EXEMPLO 33. *Suponha que $u(x, t)$ satisfaz $u_{tt} = u_{xx}$ e também $u(0, t) = 0, u(4, t) = t$. Calculemos $u(a, 8)$ em função de $u(a, 0)$. Para tanto, basta considerar o diagrama*

¹Vale a pena notar que a solução fraca dada pela fórmula de D'Alembert também satisfaz à Regra do Paralelogramo (mesmo que não seja diferenciável no sentido usual), já que continua valendo a expressão $u = F(x + ct) + G(x - ct)$ (onde $F(x) = \frac{f(x)}{2} + \int_0^x g(y) dy$ e $G(x) = \frac{f(x)}{2} - \int_0^x g(y) dy$).



onde todos os segmentos de reta desenhados são da forma $x \pm t = cte$. (isto é, paralelos às curvas características da equação da onda, já que neste caso $c = 1$). Usando a regra do paralelogramo em $ABPF$ e $DCPF$, temos

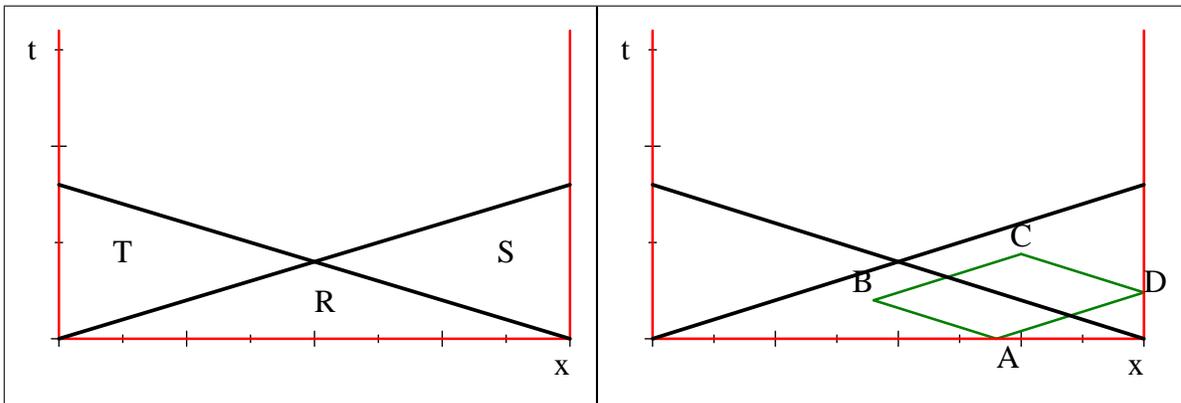
$$\begin{aligned} u(D) &= u(C) + u(E) - u(P) = u(C) + u(E) - (u(B) + u(F) - u(A)) = u(A) + u(C) + u(E) - u(B) - u(F) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(D) = u(a, 0) + (4 + a) + 0 - 0 - (4 - a) = u(a, 0) + 2a \end{aligned}$$

Note que, usando este tipo de raciocínio, é possível calcular $u(x, t + 8)$ em função de $u(x, t)$ para qualquer t real no domínio de u .

O exemplo acima ilustra uma abordagem para resolver o problema da onda quando são dadas condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$. Assim, considere o seguinte problema que modela o movimento de uma corda vibrante de comprimento L :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ para } x \in (0, L) \text{ e } t > 0 \\ u(0, t) = h_1(t) \text{ para } t > 0 \\ u(L, t) = h_2(t) \text{ para } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ para } x \in (0, L) \\ u_t(x, 0) = g(x) \text{ para } x \in (0, L) \end{cases}$$

Use as curvas características que se propagam a partir de $(0, 0)$ e $(L, 0)$ para dividir a faixa $0 < x < L$ e $t > 0$ em regiões: $R : ct < x < L - ct$, $S : ct < x; L - ct < x$ e $T : x < ct; x < L - ct$:



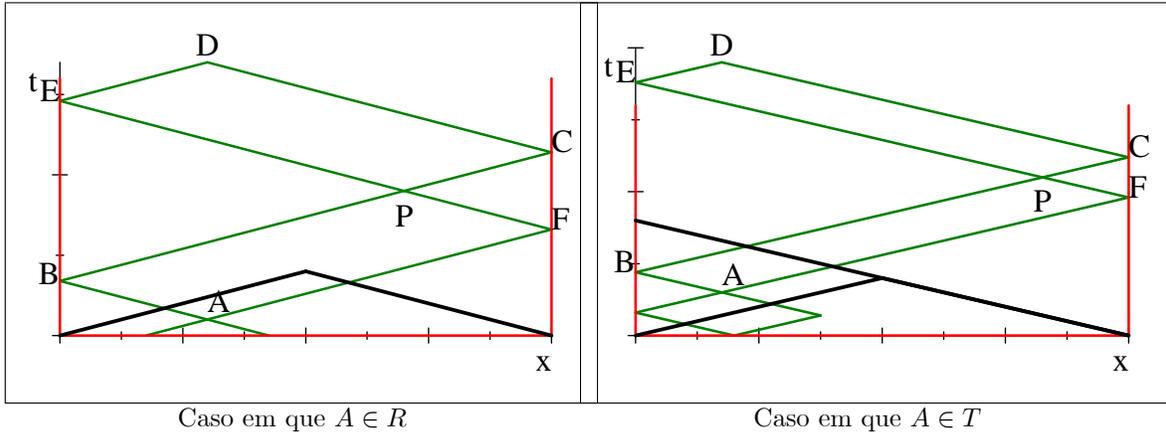
Pela fórmula de D'Alembert, na região R a solução depende apenas das condições iniciais:

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy$$

Já nas regiões $S = \{(x, t); ct < x; L - ct < x, t > 0\}$ e $T = \{(x, t); x < ct; x < L - ct, t > 0\}$ uma aplicação da regra do paralelogramo é suficiente para calcular $u(x, t)$. Por exemplo, na figura à direita, podemos calcular $u(C)$ em função de $u(D)$ (que é obtido pela condição de contorno $u(L, t_D) = h_2(t_D)$), $u(A)$ (que é dado pela condição inicial $u(x_A, 0) = f(x_A)$) e $u(B)$ (que pode ser calculado pela fórmula de d'Alembert pois B está na região R).

Em geral, para um ponto qualquer $D = (x, t)$, um diagrama análogo ao do exemplo anterior permite colocar $u(D)$ em função de $u(A)$ onde A está em uma das regiões R , S ou T . Assim, é possível encontrar fórmulas explícitas

para $u(x, t)$ em toda a faixa $(0, L) \times (0, \infty)$.



1. Exercícios

1) Uma função $u(x, t)$ satisfaz $u_{tt} = 4u_{xx}$ para quaisquer x, t reais. Sabe-se que $u(0, 0) = 12$, $u(4, 2) = -5$ e $u(-4, 2) = 3$. Calcule $u(0, 4)$.

Resposta: $u(0, 4) = -14$.

2) Uma função $u(x, t)$ satisfaz $u_{tt} = u_{xx}$ para todos x, t reais. Sabe-se que $u(1, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$ e $u(2, t) = t$ para quaisquer x e t reais. Calcule $u(1, 2)$, $u(1, 4)$, $u(3, 2)$ e $u(3, 4)$ e mostre que $u(1, 2n) = n$ para todo n inteiro positivo.

Resposta: $u(1, 2) = 1$, $u(1, 4) = 2$, $u(3, 2) = 3$ e $u(3, 4) = 6$.

3) Uma função $u(x, t)$ satisfaz $u_{tt} = u_{xx}$ para todos x, t reais. Sabe-se que $u(0, t) = 0$ e $u(2, t) = t$ para todo t real. Seja $x_0 \in (0, 1)$; calcule $u(2 - x_0, 2)$ e $u(x_0, 4)$ em função de $u(x_0, 0)$ e x_0 .

Respostas: $u(2 - x_0, 2) = u(0, x_0) + u(2, 2 - x_0) - u(x_0, 0) = 2 - x_0 - u(x_0, 0)$ e $u(x_0, 4) = u(0, 4 - x_0) + u(2, x_0 + 2) - u(2 - x_0, 2) = u(x_0, 0) + 2x_0$.

4) Uma função $u(x, t)$ satisfaz $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ para todos x, t reais. Suponha que $u(0, t) = u(L, t) = 0$ para todo t real. Mostre que, se $x_0 \in (0, L)$, então $u(x_0, 0) = -u(L - x_0, \frac{L}{c}) = u(x_0, \frac{2L}{c})$ – em particular, u é periódica de período $\frac{2L}{c}$ na direção t .

5) No exercício 7 do capítulo 11, você usou o Método da Separação de Variáveis para mostrar que a solução

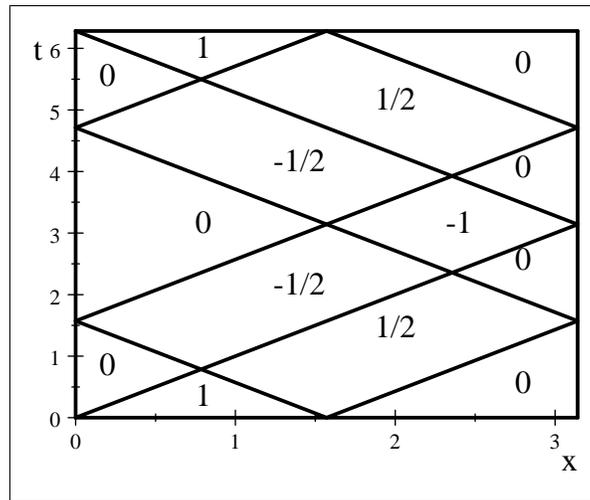
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \text{ para } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \text{ para } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

tem a seguinte expansão em série de Fourier²

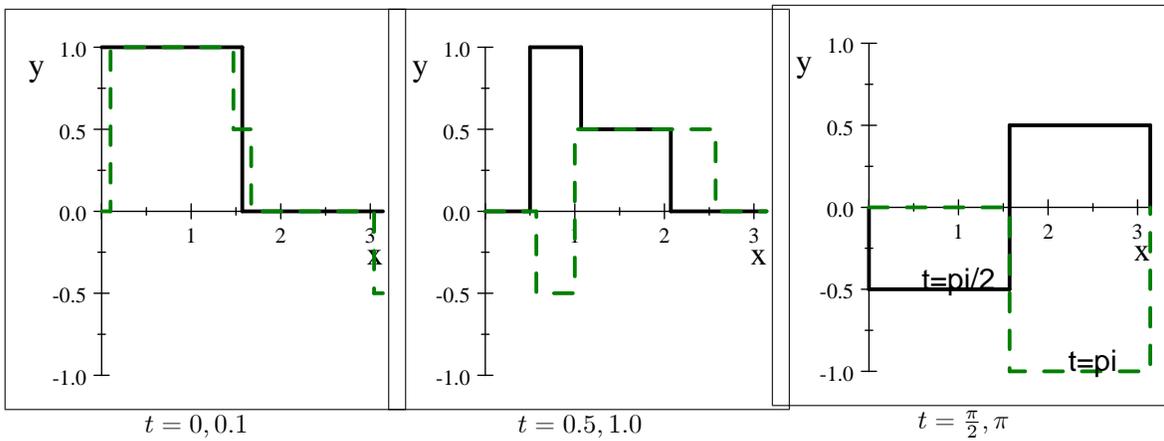
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi m} \left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right) \cos(mt) \sin(mx) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\cos t \sin x + \cos 2t \sin 2x + \cos 3t \frac{\sin 3x}{3} + \cos 5t \frac{\sin 5x}{5} + \cos 6t \frac{\sin 6x}{3} + \cos 7t \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right) \end{aligned}$$

Use agora a Regra dos Paralelogramos para mostrar que esta solução fraca é, de fato, constante em cada uma das regiões esboçadas a seguir (com os valores indicados). Usando este diagrama, esboce $u(x, t)$ versus x para os seguintes valores de t : $0, 0.1, 0.5, 1, \frac{\pi}{2}, \pi$ e 2π .

²Vale a pena citar que cada um dos termos do somatório a seguir é chamado de uma *onda estacionária* (que não deve ser confundido com o "estado estacionário" da equação do calor).



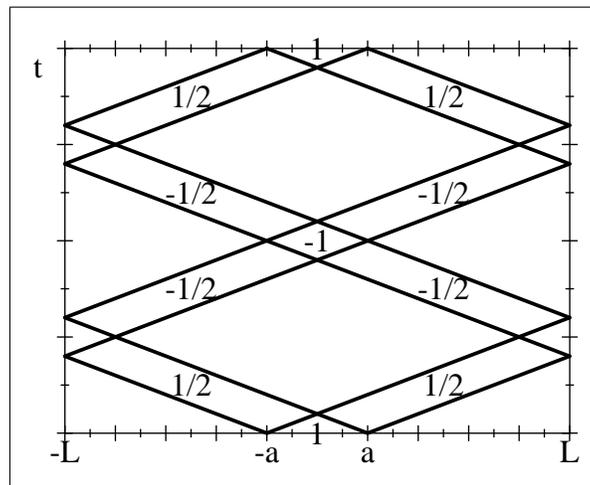
Resposta: Os gráficos para $t = 0$ e $t = 2\pi$ são idênticos. Os outros são³:



6) Suponha $a \ll L$. Use a Regra dos Paralelogramos para determinar e esboçar, no plano xt , a solução fraca de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ para } (x, t) \in (-L, L) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq a \\ 0, & \text{se } a < |x| \leq L \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \text{ para } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Resposta: nas regiões sem rótulo vale $u = 0$:



³Veja o filme no site da disciplina!

Redução ao Caso Homogêneo

Da maneira que foi apresentado, o Método da Separação de Variáveis só funciona para um Problema com condições de contorno homogêneas (para ser exato, **uma** condição não precisa ser homogênea, pois os coeficientes c_n eram ajustados ao final de acordo com esta última condição). Se as condições de contorno não são homogêneas, o princípio da superposição deixa de valer e o método não funciona. Felizmente, em muitos casos, é possível separar o problema em questão em um problema não homogêneo (simples) e um homogêneo (que pode ser resolvido pelo método da separação de variáveis). Vejamos alguns exemplos deste princípio em ação¹.

EXEMPLO 34. *Dadas as constantes A e B , considere o problema do Calor a seguir*

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} \text{ para } 0 < x < L \text{ e } t > 0 \\ u(0, t) = A \text{ para } t > 0 \\ u(L, t) = B \text{ para } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ para } 0 < x < L \end{array} \right.$$

*Infelizmente, não podemos obter soluções separadas deste sistema e superpô-las – dadas soluções u_1 e u_2 das três primeiras equações, uma combinação linear de u_1 e u_2 **não necessariamente** satisfaz as três primeiras equações: $c_1 u_1(0, t) + c_2 u_2(0, t) = c_1 A + c_2 A$ não necessariamente dá A . Ao invés, começamos por procurar uma solução particular de*

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} v_t = v_{xx} \text{ para } 0 < x < L \text{ e } t > 0 \\ v(0, t) = A \text{ para } t > 0 \\ v(L, t) = B \text{ para } t > 0 \end{array} \right.$$

Este problema é indeterminado e tem várias soluções (pois não há condição inicial, em $t = 0$). Vejamos se podemos encontrar uma solução simples, digamos, que não dependa de t : $v(x, t) = X(x)$. Se esta solução existir, ela satisfará

$$X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = ax + b$$

Como também queremos $X(0) = A$ e $X(L) = B$, chegamos à solução particular

$$v(x, t) = X(x) = \frac{B-A}{L}x + A$$

Agora fazamos $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$. Afirmamos que u é solução de $()$ se, e somente se, w é solução de*

$$(***) \left\{ \begin{array}{l} w_t = w_{xx} \text{ para } 0 < x < L \text{ e } t > 0 \\ w(0, t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ w(L, t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ w(x, 0) = f(x) - \left(\frac{B-A}{L}x + A\right) \text{ para } 0 < x < L \end{array} \right.$$

*De fato, usando que v resolve $(**)$:*

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= 0 \Leftrightarrow (u_t - v_t) - (u_{xx} - v_{xx}) = 0 \Leftrightarrow u_t - u_{xx} = 0 \\ w(0, t) &= 0 \Leftrightarrow u(0, t) - v(0, t) = 0 \Leftrightarrow u(0, t) = A \\ w(L, t) &= 0 \Leftrightarrow u(L, t) - v(L, t) = 0 \Leftrightarrow u(L, t) = B \\ w(x, 0) &= f(x) - \left(\frac{B-A}{L}x + A\right) \Leftrightarrow u(x, 0) - v(x, 0) = f(x) - \left(\frac{B-A}{L}x + A\right) \Leftrightarrow u(x, 0) = f(x) \end{aligned}$$

¹Este princípio vem da Álgebra Linear: se A é uma transformação linear (em geral, uma matriz) e \vec{b} é um vetor dado, então a solução do sistema não homogêneo $A\vec{x} = \vec{b}$ pode ser decomposta como $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_H$, onde \vec{x}_P é uma solução particular de $A\vec{x} = \vec{b}$ e \vec{x}_H é a solução geral de $A\vec{x} = \vec{0}$ (isto é, \vec{x}_H está no núcleo de A).

Assim, resolver (*) é equivalente a resolver (***) e somar $v(x, t) = \frac{B-A}{L}x + A$ à solução w encontrada. Como (***) é homogêneo, sabemos resolvê-lo por separação de variáveis. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ onde } c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \left(\frac{B-A}{L}x + A \right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{B-A}{L}x + A \end{aligned}$$

Vale a pena também observar o significado físico desta expressão – à medida que $t \rightarrow \infty$, temos que $w \rightarrow 0$ e, portanto, $u \rightarrow v$. Assim, $v(x, t)$ é dito o estado estacionário do sistema (o estado do sistema "a longo prazo", steady-state) enquanto $w(x, t)$ determina o seu transiente ou estado transitório (o estado do sistema antes de alcançar seu estado estacionário). Mais ainda, $v(x, t)$ é um equilíbrio do sistema – isto é, se a distribuição inicial de temperatura é $f(x) = \frac{B-A}{L}x + A$, ela não se alterará, pois então $w(x, t) = 0$ e $u(x, t) = v(x, t)$ para todo $t > 0$.

EXEMPLO 35. Vamos resolver a seguinte modificação da equação da onda

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Novamente, o princípio da superposição não vale na primeira equação. Procuremos então uma solução particular de

$$v_{tt} = v_{xx} + x^2$$

que não dependa de t . Tomando $v(x, t) = X(x)$, temos

$$X''(x) = -x^2 \Rightarrow X(x) = -\frac{x^4}{12} + ax + b$$

Como procuramos apenas uma solução particular, vamos escolher a mais simples: $v(x, t) = -\frac{x^4}{12}$. Agora, se $w = u - v$, temos

$$\begin{aligned} w_{tt} &= u_{tt} - v_{tt} = (u_{xx} + x^2) - (v_{xx} + x^2) = u_{xx} - v_{xx} = w_{xx} \\ w(x, 0) &= u(x, 0) - v(x, 0) = x + \frac{x^4}{12} \\ w_t(x, 0) &= u_t(x, 0) - v_t(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

Este problema em w corresponde à Equação da Onda que conhecemos, então pode ser resolvido diretamente pela fórmula de d'Alembert

$$w(x, t) = \frac{\left(\frac{(x+t)^4}{12} + (x+t)\right) + \left(\frac{(x-t)^4}{12} + (x-t)\right)}{2} = \frac{x^4 + 6t^2x^2 + t^4}{12} + x$$

Daqui recompomos $u = w + v$, chegando enfim à solução do problema original

$$u(x, t) = \frac{t^2}{2}x^2 + x + \frac{t^4}{12}$$

O leitor deve se convencer que esta idéia funciona rapidamente sempre que tivermos uma E.D.P. do tipo $u_{tt} = u_{xx} + f_1(x) + f_2(t)$ (basta tomar $v = X(x) + T(t)$ onde $X'' = -f_1$ e $T'' = f_2$). Teoricamente, a idéia também é sólida para E.D.P.s do tipo $u_{tt} = u_{xx} + f(x, t)$, mas neste caso encontrar a solução particular v pode ser mais complicado.

EXEMPLO 36. Em algumas situações, outras trocas de variáveis podem transformar um problema aparentemente difícil num conhecido. Por exemplo, considere o seguinte problema de reação-difusão

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + u \text{ para } 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ para } 0 < x < L \end{cases}$$

Neste caso, não adianta encontrar uma solução particular v tal que $v_t = c^2 v_{xx} + v$ e tomar $w = u - v$. Teríamos

$$w_t = u_t - v_t = (c^2 u_{xx} + u) - (c^2 v_{xx} + v) = c^2 w_{xx} - w$$

que é novamente a equação inicial! Uma opção é usar diretamente o método de separação de variáveis neste problema (como no problema 9 do capítulo 11). Outra opção interessante é tomar:

$$u(x, t) = e^t v(x, t)$$

Pois então

$$u_t = c^2 u_{xx} + u \iff e^t v + e^t v_t = c^2 e^t v_{xx} + e^t v \iff v_t = c^2 v_{xx}$$

e v satisfaz à equação do calor tradicional! Mais especificamente, usando $v(x, t) = e^{-t}u(x, t)$:

$$\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} \text{ para } 0 < x < L, t > 0 \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ v(x, 0) = f(x) \text{ para } 0 < x < L \end{cases}$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Escrevendo a solução como uma série de Fourier, temos

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t / L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ onde } c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

e, portanto

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(\left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right)t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Note como esta solução **amplifica** os harmônicos para os quais $n < \frac{L}{\pi}$ (baixas frequências) à medida que t cresce, e **atenua** os harmônicos para os quais $n > \frac{L}{\pi}$ (se houver um harmônico em $n = \frac{L}{\pi}$, ele será mantido intacto). Em suma, o processo trata-se de um filtro "passa-baixa".

1. Exercícios

1) Resolva o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 12x^2 \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = 2x^4 \text{ para } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \cos x \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resposta: $u(x, t) = 2x^4 + 6x^2 t^2 + t^4 + \cos x \sin t$.

2) Resolva

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \text{ para } x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u(x, 0) = \cos 2x \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resposta: $u(x, t) = 1 + e^{-4t} \cos 2x - e^{-t}$.

3) Considere o problema do calor numa barra finita

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} \text{ para } a < x < b \text{ e } t > 0 \\ u(a, t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u(b, t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \text{ para } a < x < b \end{cases}$$

A presença das constantes a e b ao invés de 0 e L dificultam a solução por separação de variáveis. Encontre uma mudança de variáveis que facilite a resolução desta equação. Qual a nova condição inicial?

Resposta: uma boa opção é $v(x, t) = u(x + a, t)$. Tomando $L = b - a$, ficamos com o velho problema

$$\begin{cases} v_t = \alpha v_{xx} \text{ para } 0 < x < L \text{ e } t > 0 \\ v(0, t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ v(L, t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ v(x, 0) = f(x + a) \text{ para } 0 < x < L \end{cases}$$

4) Resolva a seguinte equação do transporte modificada

$$u_t + cu_x - \alpha u = 0$$

usando $u(x, t) = e^{\alpha t} v(x, t)$.

Resposta: $u(x, t) = e^{\alpha t} F(x - ct)$ onde F é uma função qualquer.

5) a) Seja $f(x)$ uma função que não se anula e considere a equação

$$u_t - f(x) u_x = 0$$

Defina uma mudança de variáveis por $u(x, t) = v(w, t)$ onde $w = w(x)$ e descubra a nova equação em v . A partir daí, escolha $w(x)$ de maneira a reduzir esta equação a uma equação do transporte em v com coeficientes constantes.

b) Escreva explicitamente a solução genérica de

$$u_t = (1 + x^2) u_x$$

Resposta: a) $v_t = f(x) w' v_w$. Tomando $w' = \frac{1}{f(x)}$, isto é, $w = \int \frac{1}{f(x)} dx$, temos $v_t = v_w$ que é a equação do transporte com coeficientes constantes (cuja solução é $v(w, t) = F(w + t)$). b) $u(x, t) = F(\arctan x + t)$, onde F é uma função qualquer.

6) A seguinte E.D.P. é um caso particular da equação de Black-Scholes (usada em finanças)

$$P_t - x^2 P_{xx} - x P_x + P = 0$$

onde $x > 0$. Utilize uma mudança de variáveis do tipo $x = e^w$ para transformá-la numa equação mais conhecida.

Resposta: Fazendo $Q(w, t) = P(x, t)$ onde $x = e^w$, a nova equação em Q é

$$Q_t - Q_{ww} + Q = 0$$

Tomando agora $Q(w, t) = e^{-t} u(w, t)$, chegamos a

$$u_t = u_{ww}$$

que é a Equação do Calor em u . Juntando tudo, se $u(w, t)$ é uma solução da equação do calor $u_t = u_{ww}$, então $P(x, t) = e^{-t} u(\ln x, t)$ é uma solução da equação de Black-Scholes.

A Equação de Laplace

A equação do calor em duas dimensões é dada por

$$u_t = c\Delta u = c(u_{xx} + u_{yy})$$

onde $u(x, y, t)$ é a temperatura de uma placa bidimensional de material homogêneo no ponto (x, y) no tempo t e c é uma constante que depende das propriedades do material. Tipicamente, esta equação vem acompanhada de condições iniciais (do tipo $u(x, y, 0) = f(x, y)$) e de contorno (por exemplo, $u(x, y, t) = 0$ para $x^2 + y^2 = 1$ e $t = 0$).

Ao invés de tentar resolver tal equação em duas dimensões, abordaremos aqui apenas a seguinte questão: qual seria a distribuição de temperatura de estado estacionário desta placa? Em outras palavras, queremos uma solução que não dependa do tempo, ou seja, queremos resolver

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Esta equação é chamada de *Equação de Laplace* e aparece em vários outros contextos da Engenharia e da Física. Se a região onde vale esta equação for retangular (e o valor de u no bordo da região for determinado por condições de contorno dadas), o método da separação de variáveis é adequado:

EXEMPLO 37. *Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{para } (x, y) \in (0, L) \times (0, M) \\ u(0, y) = u(L, y) = u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in (0, L) \text{ e } y \in (0, M) \\ u(x, M) = f(x) & \text{para } x \in (0, L) \end{cases}$$

cuja solução seria a temperatura de estado estacionário de uma placa com três lados mergulhados em gelo e o quarto lado $y = M$ com distribuição de temperatura determinada por $f(x)$.

Usando separação de variáveis, procuremos soluções do tipo $u(x, y) = X(x)Y(y)$ para as duas primeiras linhas do problema acima. Teremos

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

As condições $u(0, y) = u(L, y) = 0$ implicam em $X(0) = X(L) = 0$ (pois não queremos soluções identicamente nulas). Estas condições são incompatíveis com os casos $\lambda > 0$ (que dá $X(x)$ exponencial) e $\lambda = 0$ (que dá $X(x)$ função afim), então ficamos apenas com a hipótese $\lambda < 0$ (mais especificamente, com $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$). Enfim, usando as condições $X(0) = X(L) = Y(0) = 0$, chegamos às seguintes soluções separadas:

$$u_n(x, y) = c_n \frac{e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L}}{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Para terminar, montamos uma solução por superposição¹

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

e calibramos os coeficientes c_n usando a última condição $u(x, M) = f(x)$. Assim, queremos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Rightarrow c_n = \frac{2}{L \sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right)} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Em suma, a solução é

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{onde } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Se a região em questão tem um bordo circular, pode ser preferível trabalhar em coordenadas polares. Para tanto, use a expressão do Laplaciano em coordenadas polares

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

¹Lembre que $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Esta função é bastante útil para simplificar as expressões encontradas.

EXEMPLO 38. Vamos resolver o seguinte problema de Laplace no semi-círculo unitário:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ para } 1 < r < 3 \text{ e } 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ e } 1 \leq r \leq 3 \\ u(3, \theta) = \sin 2\theta \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Procuremos soluções separadas da forma $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ para as duas primeiras linhas. A equação $\Delta u = 0$ nos dá

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rR') \cdot \Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 0 \Rightarrow -\frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{r}{R} \frac{d}{dr} (rR') = \lambda$$

onde λ é uma constante. Em suma, temos que resolver as seguintes EDOs

$$\begin{aligned} \Theta'' + \lambda\Theta &= 0 \\ \frac{d}{dr} (rR') &= \frac{\lambda R}{r} \end{aligned}$$

sujeitas às condições $R(1) = \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$.

Caso $\lambda \leq 0$: Neste caso, as soluções para $\Theta(\theta)$ são exponenciais ou funções afins. Nenhuma delas serve, pois queremos $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$.

Caso $\lambda > 0$: Então $\Theta(\theta) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\theta)$. Para ter $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$, devemos ter $\lambda = n^2$ e $C_1 = 0$, onde n é um natural positivo. Assim, $\Theta(\theta) = C_2 \sin(n\theta)$. A equação em R nos dá

$$(rR')' = \frac{n^2 R}{r} \Rightarrow r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$$

que é uma equação de Euler² cuja solução geral é da forma

$$R(r) = C_3 r^n + C_4 r^{-n}$$

Como queremos $R(1) = 0$, devemos ter $C_3 = -C_4$, isto é, $R(r) = C_3 (r^n - r^{-n})$.

Juntando tudo, encontramos as seguintes soluções separadas

$$u_n(r, \theta) = c_n (r^n - r^{-n}) \sin(n\theta)$$

Por superposição, espera-se que

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (r^n - r^{-n}) \sin(n\theta)$$

seja a solução so problema desejado – basta agora calibrar as constantes c_n para que se adaptem à última condição de contorno $u(3, \theta) = f(\theta) = \sin 2\theta$. Em geral, precisaríamos abrir $f(\theta)$ em sua série de senos $\sum b_n \sin(n\theta)$ para tomar então

$$c_n (3^n - 3^{-n}) = b_n \Rightarrow c_n = \frac{b_n}{3^n - 3^{-n}}$$

Neste caso, porém, tivemos sorte – $f(\theta) = \sin 2\theta$ é sua própria série em senos, isto é, $b_2 = 1$ e $b_m = 0$ para $m \neq 2$. Assim, a solução desejada é simplesmente $c_2 = \frac{b_2}{3^2 - 3^{-2}} = \frac{1}{80/9} = \frac{9}{80}$, isto é

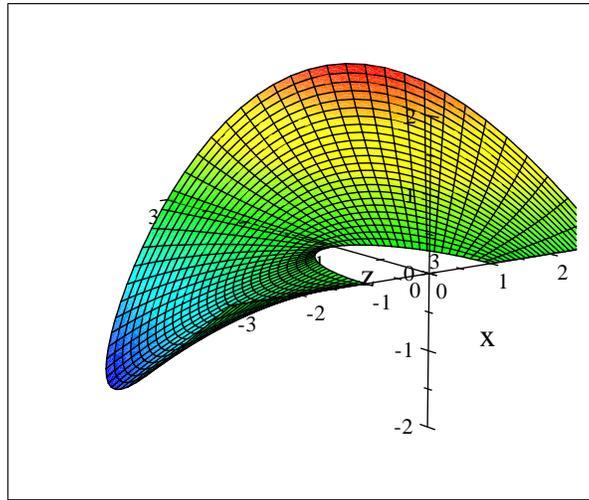
$$u(r, \theta) = \frac{9}{80} (r^2 - r^{-2}) \sin 2\theta$$

ou, de volta às coordenadas cartesianas

$$u(x, y) = \frac{9}{40} \frac{(x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1)xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

²Para relembrar a solução da Equação de Euler

$$x^2 y'' + ax y' + by = 0$$



EXEMPLO 39. Seja $f(\theta)$ uma função periódica de período 2π . Mostremos que a solução finita do seguinte problema de Laplace no círculo de raio a

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{para } 0 \leq r < a \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(a, \theta) = f(\theta) & \text{para } 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

é³

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) + b_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(n\theta) \right)$$

$$\text{onde } f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

De fato, usando o método de separação de variáveis, chegamos novamente às EDOs

$$\begin{aligned} \Theta'' + \lambda\Theta &= 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R &= 0 \end{aligned}$$

Note que queremos que Θ seja periódica de período 2π , já que, em coordenadas polares, $\theta = \alpha$ e $\theta = \alpha + 2\pi$ representam o mesmo ponto e, portanto, u deve assumir o mesmo valor para $\theta = \alpha$ e $\theta = \alpha + 2\pi$. Assim, o caso $\lambda < 0$ não nos interessa (pois Θ seria uma combinação de funções exponenciais).

No caso $\lambda = 0$ temos que Θ é uma função afim, o que só é periódica se for constante. Aí

$$rR'' + R' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(rR') = 0 \Rightarrow rR' = C_1 \Rightarrow R = C_1 \ln r + C_2$$

como $\ln r \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 0+$, para que a solução seja finita, precisamos tomar $C_1 = 0$. Assim, a única solução encontrada para $\lambda = 0$ é $u_0(x, t) = c_0 = \text{cte}$.

Enfim, se $\lambda > 0$ voltamos ao caso do exemplo anterior. Temos

$$\Theta(\theta) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\theta)$$

Como queremos que Θ seja periódica de período 2π , precisamos tomar $\lambda = n^2$. Então, analogamente ao exemplo anterior:

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta) \\ R(r) &= C_3 r^n + C_4 r^{-n} \end{aligned}$$

Mais uma vez, para que a solução seja finita quando $r \rightarrow 0+$, precisamos tomar $C_4 = 0$. Assim, encontramos as seguintes soluções separadas

$$u_n(r, \theta) = r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Superpondo tudo, esperamos ter uma solução da forma

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

³Tecnicamente, a solução a seguir satisfaz $u(a, \theta) = f(\theta)$ somente quando f é contínua; apesar disto, esta é a solução fraca desejável mesmo que f seja descontínua.

Enfim, tomando $r = a$, vem a condição

$$u(a, \theta) = f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

o que indica que esta é a série de Fourier de f . Em outras palavras, temos

$$A_0 = \frac{a_0}{2}; A_n = \frac{a_n}{a^n}; B_n = \frac{b_n}{a^n} \text{ onde } f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

demonstrando a afirmação original.

É interessante escrever esta expressão usando a forma complexa. Ficariamos ao invés com

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{re^{i\theta}}{a}\right)^n$$

ou, trocando a representação do plano xy pelo plano complexo via $z = x + iy = re^{i\theta}$:

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{z}{a}\right)^n \text{ onde } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

1. Exercícios

1) a) Mostre que

$$u(x, y) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2$$

é uma solução da equação de Laplace em todo o plano, exceto na origem.

b) Mostre que

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{C_1}{r^{n-2}} + C_2 \text{ onde } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

é uma solução da equação de Laplace em \mathbb{R}^n (exceto na origem), a saber⁴:

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = 0$$

2) Mostre que a função $y(x) = x^r$ é solução da equação de Euler

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

desde que r seja raiz de $r^2 + (a-1)r + b = 0$.

a) Conclua que, se $\Delta = (a-1)^2 - 4b > 0$, as raízes distintas r_1 e r_2 desta quadrática levam à solução geral $y(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$.

b) Se $\Delta = 0$ e há apenas uma raiz dupla r , mostre que $y(x) = x^r (C_1 + C_2 \ln x)$ é solução.

c) Enfim, se $\Delta < 0$ e as raízes são complexas da forma $\alpha \pm \beta i$, escreva $x^{\alpha \pm \beta i} = e^{(\alpha \pm \beta i) \ln x} = e^{\alpha \ln x} e^{\pm i(\beta \ln x)}$ para encontrar soluções do tipo $y = x^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x))$.

3) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace abaixo com as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } 0 < y < 1 \\ u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 1) = 0 \text{ para } 0 < x < \pi \text{ e } 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = 4 \text{ para } 0 < x < \pi \end{cases}$$

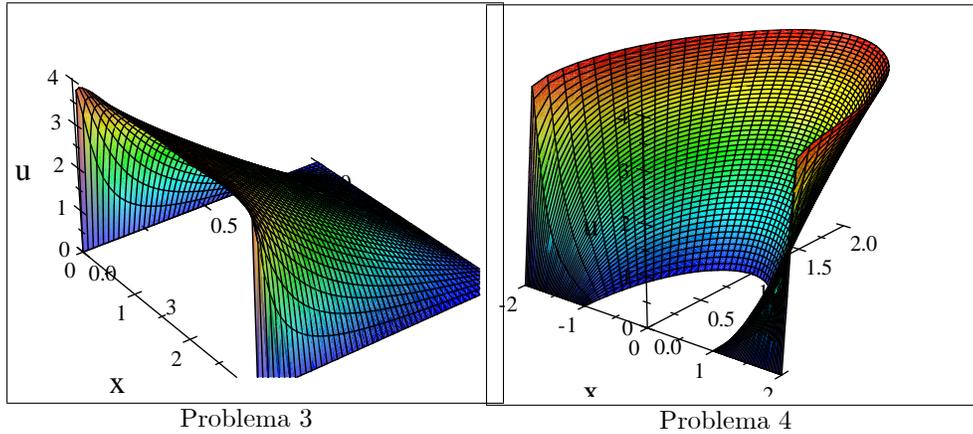
$$\text{Resposta: } u(x, y) = \frac{16}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{\sinh(n(1-y)) \sin nx}{\sinh n} \frac{1}{n}$$

4) Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace abaixo com as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ para } 1 < r < 2 \text{ e } 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \text{ para } 1 \leq r \leq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi \\ u(2, \theta) = 4 \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{Resposta: } u(r, \theta) = \frac{16}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{r^n - r^{-n} \sin(n\theta)}{2^n - 2^{-n}} \frac{1}{n}$$

⁴Em particular, em \mathbb{R}^3 , as soluções $u(x, y) = C/r$ são indicativas de vários potenciais energéticos que são "proporcionais ao inverso da distância" – como a energia potencial gravitacional, por exemplo.



5) Mostre que a solução do problema do potencial com condições de contorno

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ para } (x, y) \in (0, L) \times (0, M) \\ u(0, y) = u(L, y) = u(x, M) = 0 \text{ para } x \in (0, L) \text{ e } y \in (0, M) \\ u(x, 0) = f(x) \text{ para } x \in (0, L) \end{cases}$$

é

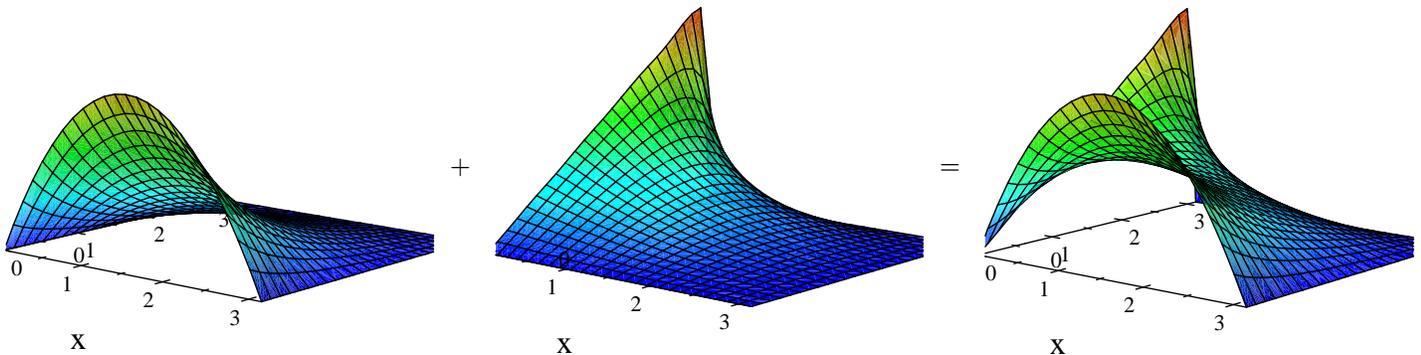
$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh(n\pi(M-y)/L)}{\sinh(n\pi M/L)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ onde } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

6) Resolva o problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ para } (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(\pi, y) = u(x, \pi) = 0 \text{ para } x \in (0, \pi) \text{ e } y \in (0, \pi) \\ u(x, 0) = x(\pi - x) \text{ para } x \in (0, \pi) \\ u(0, y) = y \text{ para } y \in (0, \pi) \end{cases}$$

[Dica: superponha duas soluções, uma com $u_1(0, y) = 0$ e outra com $u_2(x, 0) = 0$.]

Resposta: $u(x, t) = \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{8}{\pi n^3} \frac{\sinh(n(\pi-y))}{\sinh(n\pi)} \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \frac{\sinh(n(\pi-x))}{\sinh(n\pi)} \sin(ny)$



7) a) Seja R o quadrado $(0, \pi) \times (0, \pi)$ no plano xy e ∂R o seu bordo. Por separação de variáveis, mostre que a solução do problema de autovalor:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\lambda u \text{ para } (x, y) \in R \\ u &= 0 \text{ para } (x, y) \in \partial R \end{aligned}$$

é

$$u(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} c_{mn} \sin(mx) \sin(ny) \text{ onde } m, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } \lambda = m^2 + n^2$$

b) Mostre que a função

$$u_{mn}(x, y, t) = e^{-(m^2+n^2)t} \sin mx \sin ny$$

é solução do Problema do Calor bidimensional

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} \text{ para } (x, y) \in R \text{ e } t > 0 \\ u(x, y, t) = 0 \text{ para } (x, y) \in \partial R \text{ e } t > 0 \\ u(x, y, 0) = \sin mx \sin ny \text{ para } (x, y) \in R \end{cases}$$

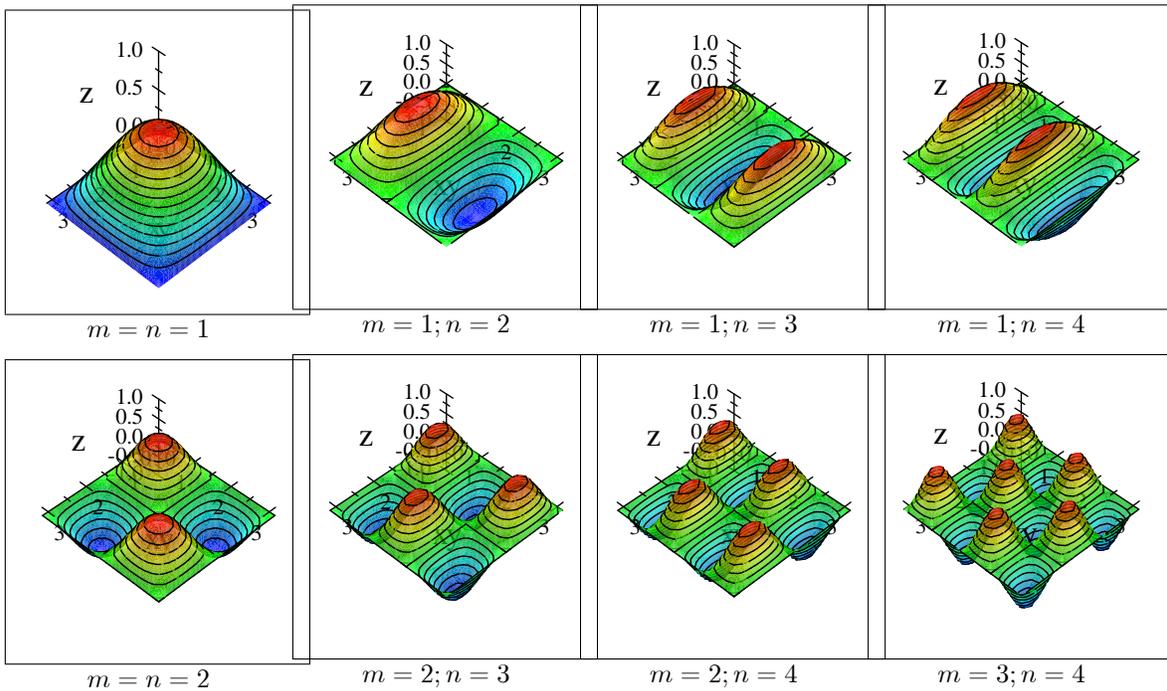
c) Mostre que

$$u_{mn}(x, y, t) = \cos(\sqrt{m^2 + n^2}t) \sin mx \sin ny$$

é solução do Problema da Onda bidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \text{ para } (x, y) \in R \text{ e } t > 0 \\ u(x, y, t) = 0 \text{ para } (x, y) \in \partial R \text{ e } t > 0 \\ u(x, y, 0) = \sin mx \sin ny \text{ para } (x, y) \in R \\ u_t(x, y, 0) = 0 \text{ para } (x, y) \in R \end{cases}$$

Nota: Como cada u_{mn} é periódica em t , estas funções são chamadas de **ondas estacionárias**⁵; elas descrevem as frequências fundamentais presentes na vibração de uma membrana retangular (os gráficos abaixo mostram algumas destas ondas quando $t = 0$).



9) a) Use a identidade $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ para descobrir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

sempre que $|r| < 1$.

b) Vimos que a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ para } 0 \leq r < a \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(a, \theta) = f(\theta) \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

é

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) + b_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(n\theta) \text{ onde } a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha \text{ e } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin(n\alpha) d\alpha.$$

Substitua os valores de a_n e b_n na expressão de $u(r, \theta)$ e use o item (a) para chegar à fórmula

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha)} f(\alpha) d\alpha$$

que é a chamada *Integral de Poisson* que representa a solução da equação do potencial.

⁵Filmes no site!

A Função Gama e as Funções de Bessel

1. A Função Gama

DEFINIÇÃO 18. Para $x > 0$, definimos a função $\Gamma(x)$ como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

PROPOSIÇÃO 12. Sempre que as integrais acima convergirem (ou seja, para $p > 0$), vale

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

PROOF.

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty t^p e^{-t} dt = (-t^p e^{-t})_0^\infty + p \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dx = (0 - 0) + p\Gamma(p)$$

□

PROPOSIÇÃO 13. Para n natural positivo, vale

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

PROOF. Por indução: vale para $n = 1$ pois $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0!$; e o passo de indução é:

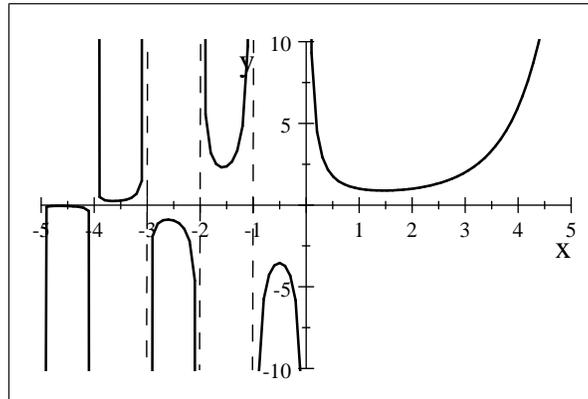
$$\text{se } \Gamma(k) = (k-1)!, \text{ então } \Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k((k-1)!) = k!$$

□

COMENTÁRIO 2. Como a integral que define $\Gamma(x)$ só converge para $x > 0$, usa-se a propriedade $\Gamma(p) = \Gamma(p+1)/p$ recursivamente para definir $\Gamma(x)$ quando $x < 0$, isto é

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n-1)}$$

onde n é escolhido de forma que $x+n > 0$. Com esta definição, o gráfico de $\Gamma(x)$ fica assim



Em outras palavras, a função $\Gamma(x)$ é uma generalização da função fatorial para $x \in \mathbb{R}$ e, portanto, cresce extremamente rápido para $x > 2$.

PROPOSIÇÃO 14. Temos

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

PROOF. Seja I a integral imprópria acima. Então

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^\infty d\theta = \frac{\pi}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

Portanto

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-u^2} (2u du) = \int_0^\infty 2e^{-u^2} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

□

A proposição a seguir dá algumas definições alternativas da função Gama (sendo a primeira delas a definição utilizada por Euler no século XVIII):

PROPOSIÇÃO 15. *Temos*

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}$$

e portanto

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n}}{1 + \frac{x}{n}}$$

onde $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n \right) \approx 0.57722\dots$ é a constante de Euler.

PROOF. Nos exercícios abaixo, indicamos como mostrar estas igualdades para x natural. O caso geral não será demonstrado aqui. □

Outras propriedades que citaremos sem demonstração incluem:

PROPOSIÇÃO 16. *A função Gama satisfaz a fórmula de reflexão*

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \text{ para } x \notin \mathbb{Z}$$

e a fórmula de duplicação

$$2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x)$$

Uma consequência importante da primeira fórmula acima é que a função Gama não tem zeros reais (nem complexos). Uma **importante** aproximação da função Gama, válida para valores altos de x , é a seguinte:

PROPOSIÇÃO 17 (Fórmula de Stirling). *Tem-se*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x} \sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$$

isto é, neste sentido,

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \text{ para } x \text{ "grande"}$$

2. Funções de Bessel

Assim como a EDO de Euler aparece ao resolver a Equação de Laplace em coordenadas polares no plano, uma outra EDO aparece ao atacar as Equações clássicas em coordenadas cilíndricas ou esféricas. Esta EDO é a *Equação de Bessel* (de ordem p):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0$$

Utilizamos o Método de Frobenius para encontrar soluções desta EDO. Lembre que o método de Frobenius consiste em procurar uma solução da forma

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

onde $a_0 \neq 0$ e s é uma constante a ser escolhida mais tarde. Então¹

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum (n+s) a_n x^{n+s-1} \\ y''(x) &= \sum (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-2} \end{aligned}$$

¹Nas linhas a seguir, somatórios sem índices são de $n=0$ até ∞ .

e, portanto,

$$\begin{aligned}x^2 y'' + xy' &= x^s \sum (n+s)(n+s-1) a_n x^n + x^s \sum (n+s) a_n x^n = x^s \sum (n+s)^2 a_n x^n \\ -p^2 y &= x^s \sum -p^2 a_n x^n \\ x^2 y &= x^s \sum a_n x^{n+2} = x^s \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\end{aligned}$$

Substituindo tudo na EDO de Bessel (e dividindo por x^s), encontramos as seguintes equações nos coeficientes a_n :

$$\begin{aligned}\text{Tomando } n &= 0: (s^2 - p^2) a_0 = 0 \\ \text{Tomando } n &= 1: ((s+1)^2 - p^2) a_1 = 0 \\ \text{Outros valores de } n &\geq 2: ((s+n)^2 - p^2) a_n + a_{n-2} = 0\end{aligned}$$

Ou seja, da primeira equação (lembrando que $a_0 \neq 0$) temos $s = \pm p$. Usemos² $s = p$. Da segunda equação, vem $a_1 = 0$. Enfim, a terceira equação dá a recorrência

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(2p+n)} \text{ ou } a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(2p+n+2)}$$

ou seja, os coeficientes de ordem ímpar serão todos nulos; os de ordem par são:

$$\begin{aligned}a_{2k} &= \frac{-a_{2k-2}}{2k(2p+2k)} = \frac{a_{2k-4}}{2k(2k-2)(2p+2k)(2p+2k-2)} = \dots \\ \dots &= \frac{(-1)^k a_0}{(2k(2k-2)(2k-4) \dots 4 \cdot 2) ((2p+2k)(2p+2k-2) \dots (2p+2)2p)} \Rightarrow \\ \Rightarrow a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (p+k)(p+k-1) \dots (p+1)p} a_0 = \frac{(-1)^k \Gamma(p)}{2^{2k} k! \Gamma(p+k+1)} a_0\end{aligned}$$

Enfim, voltando à fórmula de $y(x)$, ficamos com

$$y(x) = x^p a_0 \Gamma(p) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(p+k+1)} x^{2k}$$

Para facilitar as contas, é comum escolher uma solução tomando $a_0 = \frac{1}{\Gamma(p)2^p}$. Com esta escolha, finalmente chegamos a:

DEFINIÇÃO 19. A função de Bessel de primeira espécie de ordem p é a função definida pela seguinte série de potências

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Se p é inteiro, esta função está definida para todo x real³; se p não for inteiro, a definição só faz sentido⁴ para $x \geq 0$.

EXEMPLO 40. O caso mais comum é o caso em que p é natural:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

²No método de Fobenius a primeira solução é encontrada com o maior valor de (parte real de) s possível.

³Desde que seja usada a convenção $\frac{1}{\Gamma(n)} = 0$ sempre que n for inteiro negativo ou nulo.

⁴Aplicando o Teste da razão à série de potências, encontramos

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(n+1)(n+p+1)} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Assim, o raio de convergência da série de potências é $+\infty$. O problema com o domínio de $J_p(x)$ não está na série, mas na presença do termo x^p .

É imediato escrever alguns exemplos

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots$$

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18432} + \dots$$

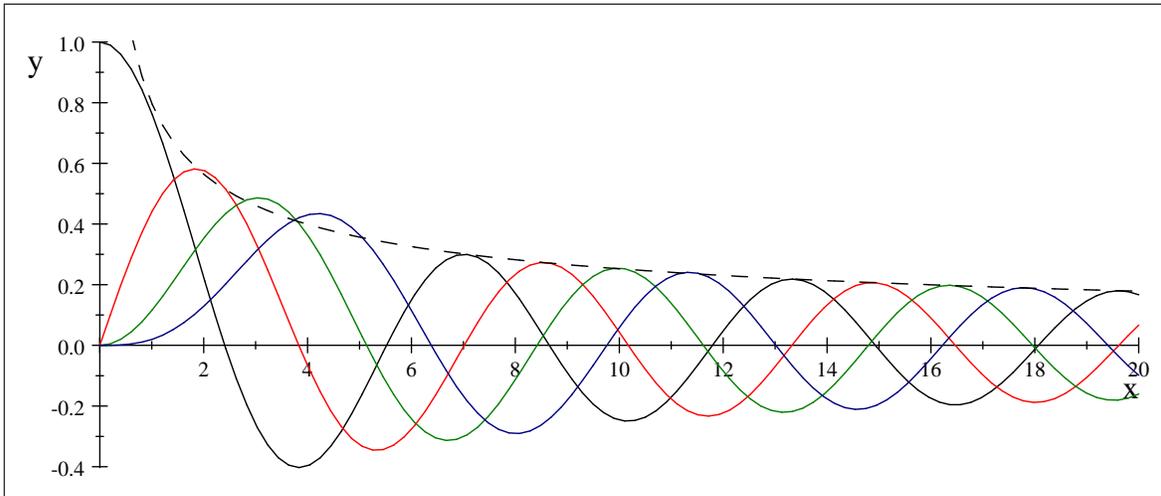
$$J_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2} = \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{96} + \frac{1}{3072}x^6 - \frac{1}{184320}x^8 + \dots$$

enquanto

$$J_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18432} - \dots$$

$$J_{-2}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-2} = \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{96} + \frac{1}{3072}x^6 - \frac{1}{184320}x^8 + \dots$$

pois os termos que apresentam $(-1)!$ ou $(-2)!$ no denominador são simplesmente descartados.



As funções de Bessel de ordem 0, 1, 2 e 3 e a função $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$

Note nos gráficos que as funções de Bessel são oscilantes⁵ (apesar de suas raízes, em geral, não estarem igualmente espaçadas) e têm decaimento semelhante a $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Outras curiosidades do gráfico (a serem demonstradas nos exercícios) são:

- Nos valores de x onde o gráfico de J_p corta o eixo x , as funções "adjacentes" J_{p+1} e J_{p-1} são simétricas.
- Nos valores de x onde o gráfico de J_p tem um mínimo ou máximo local, os gráficos das funções "adjacentes" J_{p+1} e J_{p-1} se cortam.

Deixamos as seguintes propriedades como exercícios para o leitor:

PROPOSIÇÃO 18. Se p é inteiro par, então $J_p(x)$ é uma função par. Se p é inteiro ímpar, então $J_p(x)$ é uma função ímpar.

PROPOSIÇÃO 19. Se p é um inteiro positivo, então $J_p(x) = (-1)^p J_{-p}(x)$.

PROPOSIÇÃO 20. $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ e $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$.

⁵Intuitivamente, este comportamento oscilante ocorre pois, fazendo $z = \sqrt{x}y$, a EDO de Bessel em $z(x)$ é

$$z'' + z = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{4} - p^2\right) z.$$

Para x grande, esta equação é essencialmente $z'' + z = 0$, cujas soluções são $\sin x$ e $\cos x$ (e suas combinações).

PROPOSIÇÃO 21. *Valem as seguintes relações*⁶

$$\begin{aligned}\frac{2p}{x} J_p(x) &= J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) \\ 2J'_p(x) &= J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)\end{aligned}$$

Em particular, tomando $p = 0$ na segunda equação, vem

$$J'_0(x) = -J_1(x)$$

A proposição acima, permite calcular J_{p+1} e J'_p em função de J_p e J_{p-1} ; em particular, qualquer função $J_n(x)$, assim como as suas derivadas, podem ser expressas em função de J_0 e J_1 .

Por outro lado, para calcular integrais que contenham as funções de Bessel, as próximas relações são úteis:

PROPOSIÇÃO 22. *A partir das relações acima, é fácil mostrar que*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^p J_p) &= x^p J_{p-1} \\ \frac{d}{dx}(x^{-p} J_p) &= -x^{-p} J_{p+1}\end{aligned}$$

Enfim, voltemos à EDO de Bessel original

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

De fato, tanto $J_p(x)$ como $J_{-p}(x)$ são soluções desta equação. No caso em que p não é inteiro, pode-se mostrar que estas soluções são linearmente independentes (pois $J_p(0) = 0$ enquanto $J_{-p}(0)$ é ilimitada), e a solução geral desta EDO é simplesmente

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

No entanto, no caso em que p é inteiro, as funções J_p e J_{-p} são idênticas (a menos possivelmente de um sinal)! Assim, precisamos de uma segunda solução, que é exatamente a *função de Bessel de segunda espécie*, chamada de $Y_p(x)$. Assim, para p inteiro, a solução geral da EDO de Bessel é

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x)$$

Não abordaremos a função $Y_p(x)$ neste texto; citaremos apenas que para p inteiro temos $\lim_{x \rightarrow 0^+} Y_p(x) = -\infty$. Como J_{-p} também é ilimitada perto de $x = 0$, temos:

PROPOSIÇÃO 23. *Seja $p \geq 0$. As únicas soluções limitadas próximas de $r = 0$ da EDO*

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - p^2)y = 0$$

são

$$y(x) = c_1 J_p(\lambda x)$$

PROOF. A solução geral desta EDO é $y(x) = c_1 J_p(\lambda x) + c_2 Y_p(\lambda x)$ (ou, se o leitor preferir, $y(x) = c_1 J_p(\lambda x) + c_2 J_{-p}(\lambda x)$ no caso em que p é inteiro). Como só queremos soluções limitadas próximas de $r = 0$, o resultado segue imediatamente. \square

EXEMPLO 41 (Ondas Estacionárias no Tambor). *Uma onda numa membrana pode ser representada por uma função $u(x, y, t)$ onde u é a altura da deformação desta membrana no ponto de coordenadas (x, y) no instante t . Nestas coordenadas, a Equação da Onda é*

$$u_{tt} = c^2 \Delta u = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

Se a membrana é um disco, pode ser mais útil trabalhar em coordenadas polares. Assim, procuramos uma função $u(r, \theta, t)$ que satisfaça

$$u_{tt} = c^2 \Delta u = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right)$$

Nomralizemos a equação tomando $c = 1$ e procuremos as soluções separadas desta equação. Tomando $u(r, \theta, t) = R(r) \Theta(\theta) T(t)$, vem

$$R\Theta T'' = R''\Theta T + \frac{R'\Theta T}{r} + \frac{R\Theta'' T}{r^2} \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta}$$

Assim, temos as seguintes EDOs:

$$\begin{cases} T'' = -\lambda_1 T \\ \Theta'' = -\lambda_2 \Theta \\ r^2 R'' + rR' + (\lambda_1 r^2 - \lambda_2) R = 0 \end{cases}$$

⁶A primeira das relações a seguir é uma recorrência que permite o cálculo de $J_n(x)$ a partir de $J_0(x)$ e $J_1(x)$ para qualquer x fixo e n inteiro.

Façamos mais uma simplificação: vamos procurar apenas soluções oscilatórias, isto é, soluções que sejam periódicas em t . Então temos $\lambda_1 = \lambda^2 \geq 0$ (evitando exponenciais em t); por outro lado, se o domínio for $\theta \in \mathbb{R}$, é necessário⁷ que $\Theta(\theta)$ seja uma função de período 2π , isto é, $\lambda_2 = p^2$ onde $p = 0, 1, 2, \dots$. Assim, a equação em $R(r)$ é

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - p^2) R = 0$$

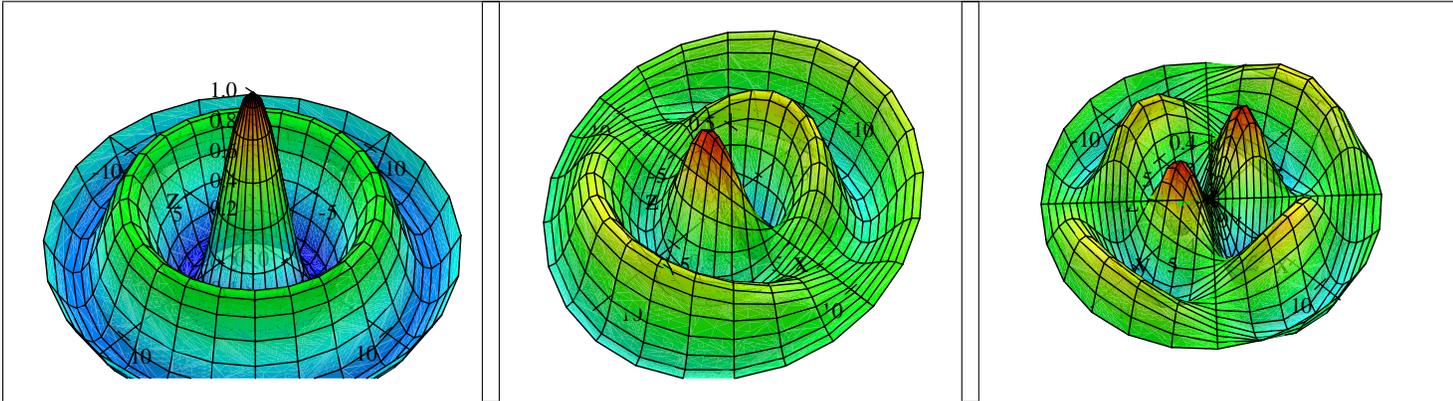
ou seja, uma EDO de Bessel de ordem p . Como p é inteiro, as soluções desta EDO são

$$R(r) = c_1 J_p(\lambda r) + c_2 Y_p(\lambda r)$$

mas, se quisermos apenas soluções que não "explodam" no centro do tambor ($r = 0$), temos de jogar fora a componente Y_p . Juntando tudo, encontramos soluções separadas da forma

$$u_{p,\lambda}(r, \theta, t) = J_p(\lambda r) (c_1 \cos p\theta + c_2 \sin p\theta) (c_3 \sin \lambda t + c_4 \cos \lambda t) = c J_p(\lambda r) \cos(p\theta + \theta_0) \cos(\lambda t + \phi_0)$$

As figuras abaixo ilustram algumas destas soluções (normalizadas tomando $c = \lambda = 1$ e $\theta_0 = \phi_0 = 0$; as soluções são ilustradas no tempo $t = 0$):



A função $u_0(r, \theta) = J_0(r)$

A função $u_1(r, \theta) = J_1(r) \cos \theta$

A função $u_2(r, \theta) = J_2(r) \cos 2\theta$

3. Exercícios

1) Calcule $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ e $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

Respostas: $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

2) Calcule $\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$ e $\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)$ em função de $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 2.6789$. Confira sua resposta com o auxílio de uma calculadora ou computador.

Resposta: $\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{28}{27} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 2.7782$; $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \simeq 1.3541$ e $\Gamma\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{80}{27} \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \simeq 4.0122$.

3) Mostre que, para $x > 0$

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2x-1} dt$$

4) Dado n natural positivo, considere

$$f_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

Pode-se mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe qualquer que seja x complexo (exceto quando $x = 0, -1, -2, \dots$), motivando a definição de uma nova função

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

a) Calcule $f(1)$.

b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x+1)}{f_n(x)}$ e mostre que $f(x+1) = x f(x)$ para todo x no domínio de $f(x)$. Em particular, conclua que $f(x) = \Gamma(x) = (x-1)!$ para x natural positivo.

c) Mostre que

$$f(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{x/n}}{1 + \frac{x}{n}}$$

onde $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n \right) \approx 0.57722\dots$ é a constante de Euler.

⁷Caso o domínio em θ seja restrito (algo como $0 \leq \theta \leq \pi$, por exemplo), então condições de contorno decidiriam os possíveis valores de λ_2 .

5) Prove as proposições 18 e 19.

6) Prove a proposição 20. Use-a para escrever as seguintes expressões em função apenas de J_0 e J_1 : a) $J_2(x)$. b) $J_2'(x)$. c) $J_1''(x)$.

Respostas: a) $J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)$; b) $J_2'(x) = \frac{2}{x}J_0(x) + \frac{x^2-4}{x^2}J_1(x)$; c) $J_1''(x) = -\frac{1}{x}J_0(x) + (\frac{2}{x^2} - 1)J_1(x)$.

7) Prove a proposição 21.

8) Use o resultado da proposição 21 para calcular (sua resposta conterá funções de Bessel):

a) $\int J_1(x) dx$

b) $\int x^{p+1}J_p(x) dx$

c) $\int (xJ_1(x) - J_0(x)) dx$ [Dica: partes em $\int xJ_1 dx$]

d) $\int x^4J_1(x) dx$ [Dica: $dv = x^2J_1$]

Respostas: a) $-J_0(x) + C$ b) $x^{p+1}J_{p+1}(x) + C$ c) $-xJ_0(x) + C$ d) $x^4J_2(x) - 2x^3J_3(x) + C$.

9) Prove a proposição 577... isto é, 22.

10) Mostre que

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}} (\sin x - x \cos x)$$

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x^5}} ((3 - x^2) \sin x - 3x \cos x)$$

11) Mostre que, se $J_p(\lambda) = 0$, então $J_{p-1}(\lambda) = -J_{p+1}(\lambda)$; por outro lado, se $J_p'(\lambda) = 0$, então $J_{p-1}(\lambda) = J_{p+1}(\lambda)$.

12) Mostre que a função $y(x) = J_p(\lambda x)$ é uma solução da EDO

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - p^2)y = 0$$

13) Sejam λ_1 e λ_2 distintos. Pelo exercício anterior, as funções $y_1(x) = J_p(\lambda_1x)$ e $y_2(x) = J_p(\lambda_2x)$ satisfazem

$$x^2y_1'' + xy_1' + (\lambda_1^2x^2 - p^2)y_1 = 0$$

$$x^2y_2'' + xy_2' + (\lambda_2^2x^2 - p^2)y_2 = 0$$

a) Mostre que:

$$\frac{d(x(y_1y_2' - y_2y_1'))}{dx} = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)xy_1y_2$$

b) Integre esta equação de 0 a 1 para concluir que, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_1x)J_p(\lambda_2x) dx = \frac{y_1(1)y_2'(1) - y_2(1)y_1'(1)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

isto é

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_1x)J_p(\lambda_2x) dx = \frac{\lambda_2J_p(\lambda_1)J_p'(\lambda_2) - \lambda_1J_p'(\lambda_1)J_p(\lambda_2)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

14) Mostre que, se m e n são inteiros, então as funções

$$u_{m,n}(r, \theta, z) = J_n(mr) \sin(n\theta + \theta_0) \sinh(mz)$$

são soluções separadas e limitadas perto de $r = 0$ da Equação de Laplace tridimensional em coordenadas cilíndricas

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0 \text{ para } r \geq 0, \theta, z \in R$$

satisfazendo a condição de contorno $u(r, \theta, 0) = 0$ (nota: não são as únicas soluções, há outras!).

Séries de Fourier-Bessel

Pode-se mostrar que as funções de Bessel de primeira espécie satisfazem à seguinte condição¹:

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_1 x) J_p(\lambda_2 x) dx = \begin{cases} \frac{\lambda_2 J_p(\lambda_1) J_p'(\lambda_2) - \lambda_1 J_p(\lambda_2) J_p'(\lambda_1)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, & \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \frac{1}{2} \left(J_p'(\lambda)^2 + \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) (J_p(\lambda))^2 \right), & \text{se } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases}$$

Em particular, se λ_1 e λ_2 forem raízes distintas de $J_p(x)$, temos a seguinte *relação de ortogonalidade*²

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_1 x) J_p(\lambda_2 x) dx = 0$$

Esta relação sugerem a criação do seguinte *produto interno com peso* x entre duas funções com domínio $[0, 1]$:

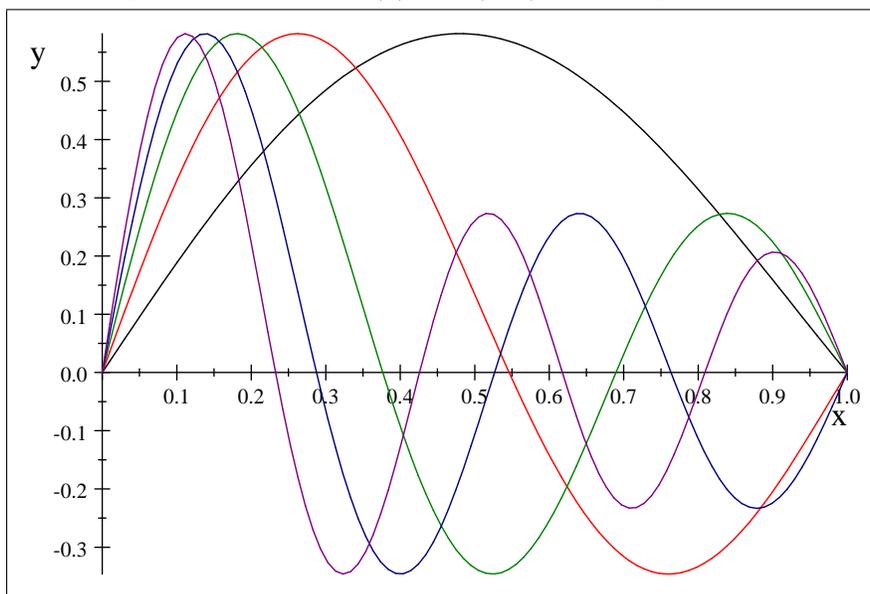
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x f(x) g(x) dx$$

Note que esta operação define, de fato, um produto interno³. Fixe um determinado p e considere as funções $\phi_n(x) = J_p(\lambda_n x)$ onde $n = 1, 2, 3, \dots$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ são as raízes positivas de $J_p(x)$. A relação de ortogonalidade acima diz simplesmente que o conjunto $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots\}$ é ortogonal com relação a este produto interno!

EXEMPLO 42. As raízes das funções de Bessel, e de suas derivadas, são tabeladas. Por exemplo, aqui estão as cinco primeiras raízes positivas das funções de Bessel e suas derivadas, de ordens 0 a 5:

	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_0'	J_1'	J_2'	J_3'	J_4'	J_5'
λ_1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715	3.8317	1.8412	3.0542	4.2012	5.3175	6.4156
λ_2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386	7.0156	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824	10.5199
λ_3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872
λ_4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801	13.3237	11.7060	13.1704	14.5858	15.9641	17.3128
λ_5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178	16.4706	14.8636	16.3475	17.7887	19.1960	20.5755

A título de exemplo, tomemos $p = 1$; as funções $\phi_n(x) = J_1(\lambda_n x)$ têm os seguintes gráficos no intervalo $[0, 1]$:



¹A expressão do caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$ é o último exercício da aula anterior; tomando, nesta expressão, $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$, obtém-se a segunda fórmula.

²É interessante notar que esta relação também valeria se λ_1 e λ_2 fossem raízes distintas da *derivada* de $J_p(x)$.

³Para ser exato, é necessário que consideremos duas funções que diferem em um conjunto de medida nula como se fossem representadas pelo mesmo vetor.

Note que $\phi_n(1) = J_p(\lambda_n) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. As funções ϕ_n desempenham no intervalo $[0, 1]$ um papel análogo ao das funções $\sin(nx)$ no intervalo $[0, \pi]$, como veremos a seguir.

Suponha agora que uma função $f(x)$ seja uma combinação linear das funções ϕ_n , digamos

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x)$$

então, como as ϕ_n são ortogonais, sabemos da Álgebra Linear que

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \frac{\int_0^1 x f(x) \phi_n(x) dx}{\int_0^1 x \phi_n^2(x) dx}$$

Como há, de fato, uma infinidade de funções ϕ_n , mesmo que $f(x)$ não seja uma combinação linear destas funções, ainda assim podemos tentar expressá-la como uma série infinita. Esta idéia inspira a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 20. *Seja $f(x)$ uma função com domínio $[0, 1]$. A série de Fourier-Bessel de $f(x)$ é a série⁴*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(\lambda_n x)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ são as raízes de $J_p(x)$ e

$$c_n = \frac{2}{(J'_p(\lambda_n))^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x) dx = \frac{2}{(J_{p\pm 1}(\lambda_n))^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x) dx$$

TEOREMA 13. *Assim como nas séries de Fourier, pode-se mostrar que, se $f(x)$ é seccionalmente suave, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(\lambda_n x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

para todo $x \in (0, 1)$. *Mais ainda, se $f(x)$ é C^1 , a convergência é uniforme.*

EXEMPLO 43 (Equação da Onda no Tambor). *Continuando o exemplo da aula anterior, vamos resolver o problema da onda num tambor circular com (i) extremidades fixas; (ii) velocidade inicial nula e (iii) posição inicial circularmente simétrica. Pela simetria do problema, esperamos encontrar soluções que não dependam de θ . Assim, o problema a ser resolvido é:*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r & \text{para } r < 1 \text{ e } t > 0 \\ u(1, t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u_t(r, 0) = 0 & \text{para } r < 1 \\ u(r, 0) = f(r) & \text{para } r < 1 \end{cases}$$

Como vimos na aula anterior, o método de separação de variáveis aplicado às 3 primeiras equações acima nos dá soluções oscilatórias do tipo

$$u_\lambda(r, t) = J_0(\lambda r) (\alpha \sin \lambda t + \beta \cos \lambda t)$$

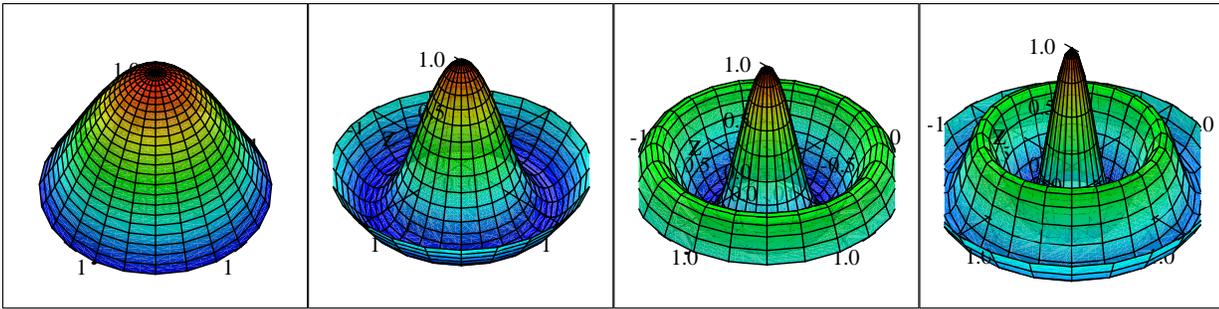
A condição $u_t(r, 0) = 0$ diz simplesmente que $\alpha = 0$; já a condição $u(1, t) = 0$ indica que $J_0(\lambda) = 0$, isto é, λ tem de ser uma das raízes da função $J_0(x)$. Denominando tais raízes por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ chegamos às seguintes soluções da parte homogênea do problema

$$u_n(r, t) = J_0(\lambda_n r) \cos(\lambda_n t)$$

Assim como as funções $\sin(nx)$ são os harmônicos fundamentais de uma corda de comprimento π fixada nas extremidades, estas funções $\phi_n(r, t) = J_0(\lambda_n r) \cos(\lambda_n t)$ são os harmônicos fundamentais⁵ de uma membrana circular de raio 1 fixada nas extremidades. As figuras abaixo mostram os gráficos de ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e ϕ_4 para $t = 0$ – as animações correspondentes a estas oscilações estão no site!

⁴Se o domínio de $f(x)$ for $[0, L]$, troque cada x por $\frac{x}{L}$ nas fórmulas a seguir.

⁵Para ser exato, estes são os modos de vibração rotacionalmente simétricos; há outros modos de vibração que dependem de θ e que não estão nesta lista.



Agora, aplicando o Princípio da Superposição, teremos soluções da forma

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) \cos(\lambda_n t)$$

Como ajustar os coeficientes c_n para que valha a última condição $u(r, 0) = f(r)$? Ora queremos

$$u(1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) = f(r)$$

ou seja, os coeficientes c_n são exatamente os coeficientes da série de Fourier-Bessel de $f(r)$ (e a igualdade vale desde que f seja contínua e se anule em $r = 0$ e $r = 1$). Em suma, a solução procurada é

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) \cos(\lambda_n t)$$

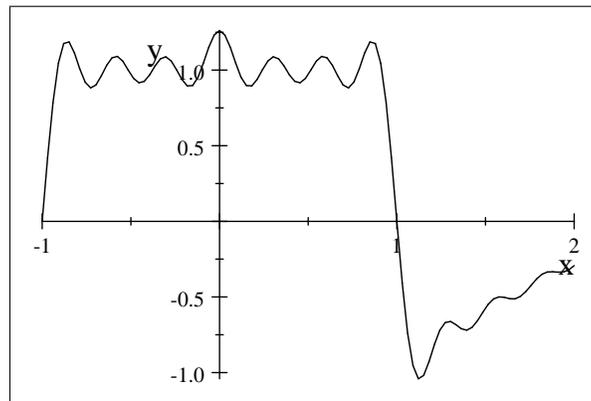
$$\text{onde } c_n = \frac{2}{(J_1(\lambda_n))^2} \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_n x) dx$$

1. Exercícios

1) a) Mostre que a expansão da função $f(x) = 1$ (domínio $0 < x < 1$) em série de Fourier-Bessel de ordem 0 é

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\lambda_n x)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ são as raízes de $J_0(x)$.



Soma dos sete primeiros termos da serie

b) Conclua que a solução do Problema da Onda em coordenadas polares

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r & \text{para } r < 1 \text{ e } t > 0 \\ u(1, t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u_t(r, 0) = 0 & \text{para } r < 1 \\ u(r, 0) = 1 & \text{para } r < 1 \end{cases}$$

é

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n r) \cos(\lambda_n t)$$

2) As bordas de uma placa bidimensional homogênea circular de raio 1 são mantidas em temperatura zero, e o resto da placa é isolado do meio ambiente. Se a distribuição inicial de temperatura for rotacionalmente simétrica,

é de se esperar que a temperatura dependa apenas da distância ao centro da placa e do tempo, isto é, que seja da forma $u = u(r, t)$. Assim, chegamos ao problema

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r & \text{para } r < 1 \text{ e } t > 0 \\ u(1, t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u(r, 0) = f(r) & \text{para } r < 1 \end{cases}$$

Mostre que a solução limitada deste problema é

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) \quad \text{onde } c_n = \frac{2}{(J_1(\lambda_n))^2} \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_n x) dx$$

e $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ são as raízes positivas de $J_0(x)$.

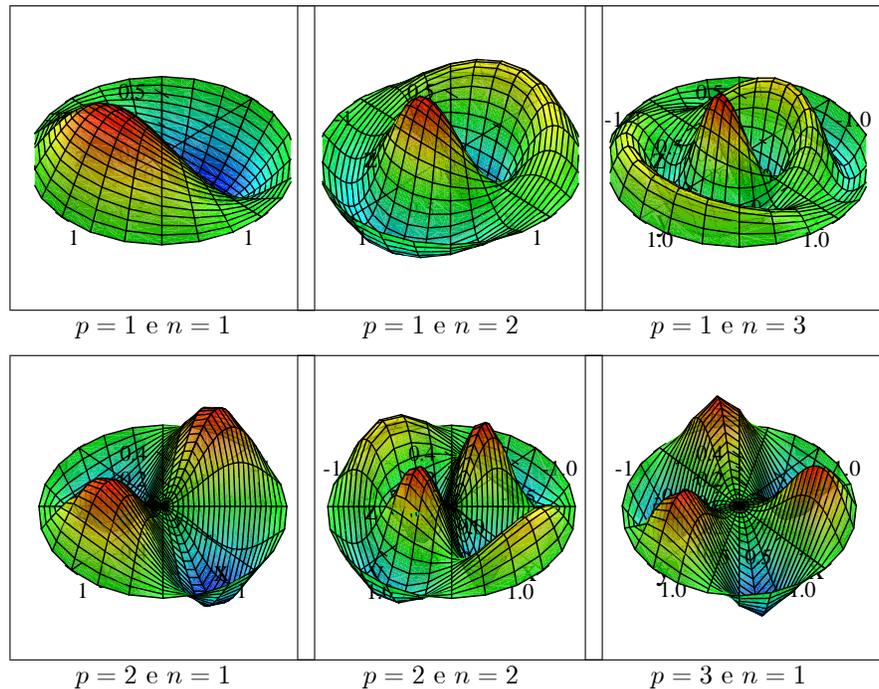
3) Seja p um número inteiro e w e θ_0 reais quaisquer. Mostre que as funções

$$u_{pw}(r, \theta, t) = J_p(wr) \sin(p\theta + \theta_0) \cos(wct)$$

são soluções separadas do problema da onda

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \right)$$

Em particular, se quisermos que tais soluções também satisfaçam a condição $u(R, \theta, t) = 0$ para algum R fixo, então devemos tomar $w = \frac{\lambda_n}{R}$ onde λ_n é uma das raízes de J_p (o caso $p = 0$ corresponde às soluções rotacionalmente simétricas encontradas no texto; mostramos abaixo os gráficos de outras soluções em $t = 0$ usando $\theta_0 = 0$ e $R = 1$):



4) Encontre a série de Fourier-Bessel de ordem 0 da função $f(x) = x$. Utilize-a para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \frac{1}{4}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são as raízes de $J_0(x)$. [Dica: adapte Parseval...]

Funções de Legendre

Outra EDO que aparece freqüentemente na resolução de EDPs em problemas físicos¹ é a EDO de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$$

onde $y(x)$ é uma função cujo domínio se restringe ao intervalo $x \in (-1, 1)$ e p é um número real.

Como $x = 0$ é um ponto ordinário desta EDO, desta vez basta procurar soluções em série do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Substituindo esta expressão na EDO de Legendre, vem

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

com a_0 e a_1 arbitrários. Em outras palavras

$$y(x) = a_0 \left(1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6 + \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{(p-1)(p+3)}{3!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+3)(p+5)}{5!}x^5 - \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+3)(p+5)(p+7)}{7!}x^7 + \dots \right)$$

No caso em que p é inteiro, note que $a_{p+2} = 0$, e portanto também se anulam os coeficientes a_{p+4} , a_{p+6} , etc. Em outras palavras, se p é par a série de potências que multiplica a_0 é um polinômio (finito!) de grau p ; se p é ímpar, a série de potências que multiplica a_1 será um polinômio de grau p . Para escrever este polinômio de forma compacta, basta completar os fatoriais; por exemplo, no caso em que p é par (digamos, $p = 2m$), os seguintes produtos aparecem no termo em x^{2k} :

$$p(p-2)(p-4)\dots(p-2k+2) = 2m(2m-2)(2m-4)\dots(2m-2k+2) = 2^k \frac{m!}{(m-k)!}$$

$$(p+1)(p+3)\dots(p+2k-1) = \frac{(p+2k)!}{p!(p+2)(p+4)\dots(p+2k)} = \frac{(p+2k)!}{p!2^k(m+1)(m+2)\dots(m+k)} = \frac{1}{2^k} \frac{(p+2k)!m!}{p!(m+k)!}$$

e, portanto, o polinômio que acompanha a_0 é

$$\sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i (m!)^2 (p+2i)!}{(m-i)!p!(m+i)!(2i)!} x^{2i} = \frac{(m!)^2}{p!} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i (p+2i)!}{(m-i)!(m+i)!(2i)!} x^{2i}$$

A constante à esquerda pode ser incorporada a a_0 ; tomando $i = m - k$ ficamos com o polinômio

$$\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k} (2p-2k)!}{k!(p-k)!(p-2k)!} x^{p-2k}$$

Enfim, no caso em que p é ímpar, tomamos $p = 2m + 1$ e chegamos a esta mesma expressão! Isto nos inspira a definir:

DEFINIÇÃO 21. *Seja $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, isto é, $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$ dependendo do caso em que n é par ou ímpar. Definimos o polinômio de Legendre de grau n pela fórmula*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

¹Por exemplo, ao resolver a equação de Laplace em coordenadas esféricas...

EXEMPLO 44. Os primeiros polinômios de Legendre são

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

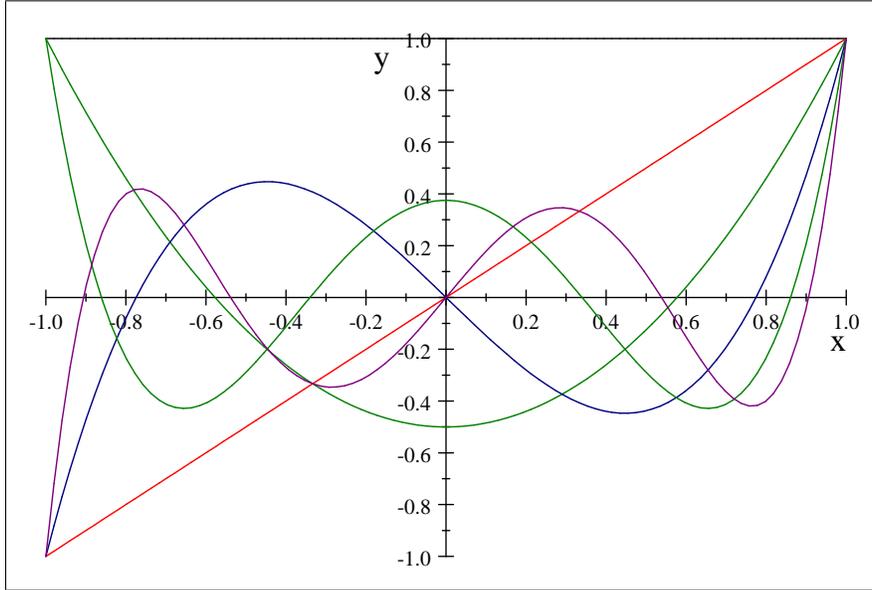
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{4}(10x^3 - 6x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{16}(126x^5 - 140x^3 + 30x)$$

cujos gráficos são:



Note que a constante $\frac{1}{2^n}$ foi escolhida de forma a que todos eles satisfaçam a condição $P_n(1) = 1$. É fácil também ver que $P_n(x)$ é par se n é par e $P_n(x)$ é ímpar se n é ímpar.

Os polinômios de Legendre têm as seguintes propriedades:

PROPOSIÇÃO 24 (Fórmula de Rodrigues).

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right)$$

PROOF. Basta abrir $(x^2 - 1)^n$ em binômio de Newton

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i n!}{(n-i)! i!} x^{2i} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} n!}{k! (n-k)!} x^{2n-2k}$$

Derivando esta fórmula n vezes e dividindo por $2^n n!$, chega-se à expressão do polinômio de Legendre. \square

Há relações de recorrência entre os polinômios de Legendre que são parecidas com as relações entre as funções de Bessel:

PROPOSIÇÃO 25. Valem as seguintes relações

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

$$(x^2 - 1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

PROPOSIÇÃO 26. A partir das relações acima, é fácil mostrar que

$$\frac{d}{dx} (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) = (2n+1)P_n(x)$$

Voltemos brevemente à discussão da EDO de Legendre. O resultado final é que, para n inteiro não-negativo, a solução geral da EDO de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

é

$$y(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

onde a função $P_n(x)$ é um *polinômio de Legendre de ordem n* e $Q_n(x)$ é uma *função de Legendre de segunda espécie e ordem n* . A função $Q_n(x)$ é a série infinita encontrada na solução da EDO acima, normalizada por uma constante apropriada. Das funções $Q_n(x)$, citaremos aqui apenas que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} Q_n(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -1^+} Q_n(x) = (-1)^{n+1} \infty$$

portanto, a única solução **limitada** (no intervalo $[-1, 1]$) da EDO de Legendre não inclui $Q_n(x)$, e é dada por

$$y(x) = c_1 P_n(x).$$

1. Séries de Fourier-Legendre

Desta vez, temos a seguinte relação de ortogonalidade:

PROPOSIÇÃO 27.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{se } m = n \end{cases}$$

Isto significa que, usando o produto interno $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$, os polinômios de Legendre são ortogonais. Isto inspira a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 22. *Seja $f(x)$ uma função com domínio $[-1, 1]$. Sua série de Fourier-Legendre é*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n(x)$$

onde

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

Enfim, o teorema de convergência para as séries de Fourier-Legendre é praticamente idêntico aos das séries de Fourier e Fourier-Bessel:

TEOREMA 14. *Seja $f(x)$ uma função seccionalmente suave com domínio $[-1, 1]$. Então, se $-1 < x < 1$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

onde o lado esquerdo é a série de Fourier-Legendre de $f(x)$. Mais ainda, se $f(x)$ é C^1 , então a convergência é uniforme em qualquer intervalo fechado contido em $(-1, 1)$.

EXEMPLO 45. *Queremos encontrar soluções $u(x, y, z)$ da equação*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ se } (x, y, z) \in S$$

onde S é um sólido (correspondendo, por exemplo, a estados estacionários da temperatura u de um sólido). Se S é bem representado em coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) , pode ser vantajoso utilizar esta outra expressão do Laplaciano

$$u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho^2} (\cot \theta) u_{\theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} u_{\phi\phi} = 0 \text{ em } S$$

Procuramos soluções que apresentem simetria azimutal, isto é, que não dependam de ϕ . Estas soluções $u(\rho, \theta)$ satisfazem

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + 2\rho u_{\rho} + u_{\theta\theta} + (\cot \theta) u_{\theta} = 0$$

Começamos procurando por soluções separadas, isto é, do tipo $u(\rho, \theta) = R(\rho) \Theta(\theta)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2 R''}{R} + \frac{2\rho R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \cot \theta \frac{\Theta'}{\Theta} &= 0 \Rightarrow \frac{\rho^2 R''}{R} + \frac{2\rho R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} - \cot \theta \frac{\Theta'}{\Theta} = k_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \rho^2 R'' + 2\rho R' - k_1 R = 0 \\ (\sin \theta) \Theta'' + (\cos \theta) \Theta' + k_1 (\sin \theta) \Theta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Façamos a mudança de variáveis $Y(x) = \Theta(\theta)$ onde $x = \cos \theta$ na segunda equação. Vem

$$\begin{aligned} \Theta'(\theta) &= -Y'(x) \sin \theta \\ \Theta''(\theta) &= Y''(x) \sin^2 \theta - Y'(x) \cos \theta \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta Y'' - 2 \sin \theta \cos \theta Y' + k_1 \sin \theta Y &= 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - x^2) Y'' - 2xY' + k_1 Y = 0 \end{aligned}$$

que é exatamente a equação de Legendre se tomarmos $k_1 = p(p+1)$. As únicas soluções limitadas para $x \in (-1, 1)$ são os polinômios de Legendre, para $p = n$ inteiro. Então

$$Y(x) = a_n P_n(x) \Rightarrow \Theta(\theta) = a_n P_n(\cos \theta)$$

A EDO em R é uma EDO de Euler

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - n(n+1)R = 0$$

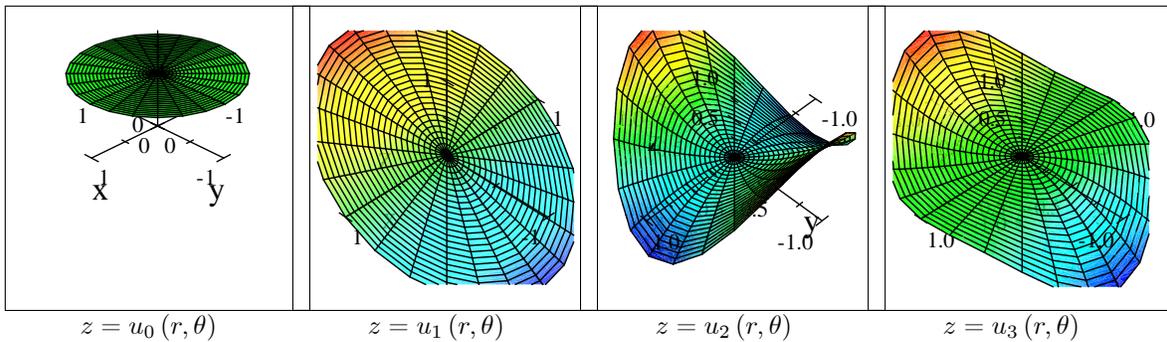
cuja solução geral é

$$R(\rho) = \alpha \rho^n + \beta \rho^{-n-1}$$

Em particular, se desejarmos soluções separadas limitadas próximo de $r = 0$, ficamos apenas com soluções do tipo

$$u_n(\rho, \theta) = c_n \rho^n P_n(\cos \theta)$$

cujos gráficos $z = u(r, \theta)$ são



Usando o princípio da superposição, encontramos mais geralmente as soluções

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n P_n(\cos \theta)$$

EXEMPLO 46. Considere agora o problema de valor de contorno definido numa esfera S de centro na origem e raio 1:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em int}S \\ u(1, \theta, \phi) = 4 \cos^3 \theta & \text{em } \partial S \end{cases}$$

A solução deste problema dará a função temperatura u dentro da esfera, em estado estacionário, se o bordo da esfera é mantido à temperatura $u = 4 \cos^3 \theta$ (em coordenadas polares). Como a condição de contorno não depende do âzimute, é razoável procurar soluções que não dependam de ϕ , recaindo no exemplo anterior, cuja solução era

$$u(\rho, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n P_n(\cos \theta)$$

Para valer a condição de contorno, tomamos $r = 1$. Queremos então escolher os coeficientes c_n de forma a ter

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta) = 4 \cos^3 \theta$$

ou seja, queremos que $\sum c_n P_n(x) = 4x^3$. Mas sabemos escrever o polinômio x^3 em função dos polinômios de Legendre (basta usar a série de Fourier-Legendre e parar no quarto termo, como no exercício 3 abaixo):

$$4x^3 = \frac{12}{5} P_1(x) + \frac{8}{5} P_3(x)$$

Assim, a temperatura de estado estacionário desejada é

$$u(\rho, \theta, \phi) = \frac{12}{5} \rho P_1(\cos \theta) + \frac{32}{5} \rho^3 P_3(\cos \theta) = \frac{12}{5} \rho \cos \theta + \frac{16}{5} \rho^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

2. Exercícios

1) a) Use a EDO de Legendre para mostrar que

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) P_n'(x) \right) + n(n+1) P_n(x) = 0$$

b) Multiplicando esta equação por $P_m(x)$, tem-se

$$P_m \frac{d}{dx} \left((1-x^2) P_n'(x) \right) + n(n+1) P_n P_m = 0$$

Analogamente

$$P_n \frac{d}{dx} \left((1-x^2) P_m'(x) \right) + m(m+1) P_m P_n = 0$$

Subtraia estas equações e integre de -1 a 1 para mostrar a relação de ortogonalidade entre P_m e P_n [Não se esqueça do caso $m = n$].

2) Considere os $N + 1$ polinômios $P_0(x), P_1(x), \dots, P_N(x)$. Use a relação de ortogonalidade para mostrar que eles são linearmente independentes (isto é, mostre que $\sum_{k=0}^N a_k P_k(x) = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_N = 0$).

3) Escreva os polinômios x^2 e x^3 como combinação linear de $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ e $P_3(x)$.

Resposta: $x^2 = \frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3} P_0(x)$; $x^3 = \frac{3}{5} P_3(x) + \frac{2}{5} P_1(x)$.

4) Mostre que todo polinômio $q(x)$ de grau N pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios de Legendre $\sum_{n=0}^N c_n P_n(x)$ onde os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{\langle q(x), P_n(x) \rangle}{\langle P_n(x), P_n(x) \rangle} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 q(x) P_n(x) dx$$

5) Demonstre as proposições 25 e 26.

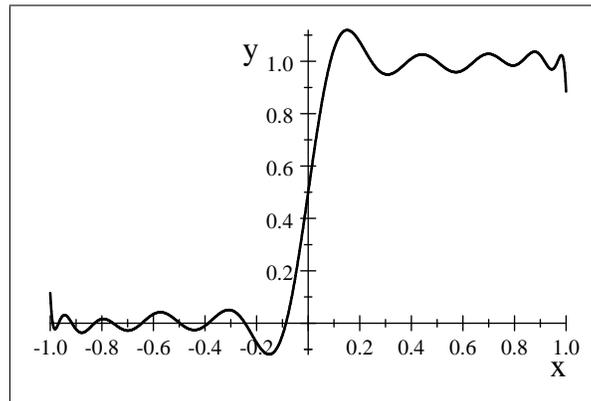
6) Mostre que

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{2^n} \binom{n}{n/2}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

7) Obtenha a série de Fourier-Legendre da função $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Resposta:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} P_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} \frac{4k+3}{2k+2} \binom{2k}{k} P_{2k+1}(x)$$



Aproximação polinomial de grau 19 para $f(x)$.