MECÂNICA ANALÍTICA — 1/2020 — REMOTO

LISTA DE EXERCÍCIOS 1

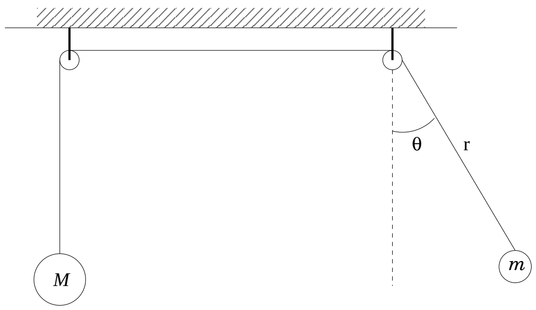
1. Considere a chamada máquina de Atwood oscilante, em que M só se move verticalmente.
(a) Usando as coordenadas indicadas na figura, mostre que, salvo por uma constante aditiva que pode ser descartada, a lagrangiana é dada por

$$L = \frac{m+M}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - gr(M - m\cos\theta)$$

e escreva as equações de Lagrange. Especifique a escolha de eixos coordenados que foi feita para chegar a esta lagrangiana.
(b) Considere separadamente os limites $m \to 0$ e $M \to \infty$ das equações de movimento. Suas equações de movimento se reduzem ao que você esperava nesses dois limites? Explique com argumentos físicos. A propósito, esses dois limites são distintos? Justifique sua resposta.
(c) No caso em que $M = m$, suponha que o sistema entra em movimento a partir do repouso:

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

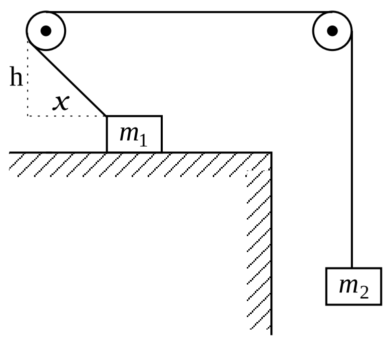
onde $\theta_0 \ll 1$. Escreva as equações de movimento no instante $t = 0$ na aproximação de pequenas oscilações, em que termos de segunda ordem em diante em θ são desprezíveis. Descreva o movimento executado por cada uma das massas nos instantes imediatamente posteriores ao instante $t = 0$.



2. No sistema descrito na figura abaixo, o fio é inextensível e, assim como as polias, tem massa desprezível. A massa m_1 só se move horizontalmente sobre uma mesa sem atrito, enquanto m_2 só se move verticalmente. Prove que, a menos de uma constante aditiva que pode ser ignorada, a lagrangiana do sistema em termos da coordenada x é

$$L = \frac{m_1(h^2+x^2) + m_2x^2}{h^2+x^2}\,\frac{\dot{x}^2}{2} - m_2 g\sqrt{h^2+x^2}\,.$$

Escreva a equação de Lagrange para x.



3. Um pêndulo elástico consiste numa massa m capaz de oscilar num plano vertical suspensa por uma mola de constante elástica k e comprimento natural l. Escolhendo coordenadas generalizadas convenientes, obtenha a lagrangiana e as equações de Lagrange. Teste suas equações considerando algum caso particular ou caso-limite para o qual você já conhece o resultado.

4. O ponto de suspensão de um pêndulo de massa m e comprimento l está preso a um suporte de massa M que se move horizontalmente com aceleração constante a. Obtenha uma lagrangiana e a(s) equação(ões) de Lagrange do sistema. Qual é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical quando se encontra na posição de equilíbrio?

5. Um bloco de massa m desliza sem atrito ao longo de uma cunha de massa M e ângulo α. A cunha, por sua vez, escorrega sem atrito sobre uma superfície horizontal.
(a) Quantos graus de liberdade este sistema possui?
(b) Escolhendo coordenadas generalizadas convenientes, obtenha a lagrangiana e as equações de movimento do sistema.
(c) Determine a magnitude da aceleração da cunha relativamente ao sistema de referência inercial (x, y).
(d) Determine a magnitude da aceleração do bloco em relação à cunha.
(e) Verifique se suas duas respostas anteriores estão corretas considerando pelo menos dois casos particulares ou limites **distintos** para os quais você já conhece os resultados.