GABARITO

MECÂNICA ANALÍTICA - 1/2019

TESTE 2 — 08/05/2019

NOME:

(a) **(4,0 pontos)** Construa, em termos dos ângulos de Euler, a lagrangiana para um pião simétrico restrito a ser mover num campo gravitacional constante de tal modo sua ponta inferior desliza sem atrito sobre um plano horizontal.

(b) **(2,0 pontos)** Explique sua escolha de eixos fixos no corpo.

(c) **(2,0 pontos)** Identifique todas as constantes de movimento.

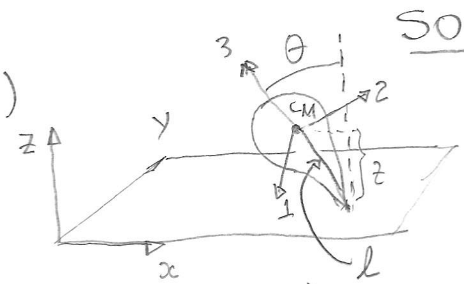
(d) **(2,0 pontos)** Descreva como a solução do problema pode ser reduzida a quadraturas.

Dados: com x, y, z eixos inerciais e x', y', z' eixos fixos no corpo, tem-se

$$\omega_{x'} = \dot\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \dot\theta \cos\psi, \quad \omega_{y'} = \dot\phi \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \dot\theta \operatorname{sen}\psi, \quad \omega_{z'} = \dot\psi + \dot\phi \cos\theta;$$
$$\omega_x = \dot\theta \cos\phi + \dot\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad \omega_y = \dot\theta \operatorname{sen}\phi - \dot\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \quad \omega_z = \dot\phi + \dot\psi \cos\theta.$$

SOLUÇÃO

(a)



A energia cinética é

$$T = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2} I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2$$

onde (x,y,z) são as coordenadas do centro de massa do pião. Note que $z = l\cos\theta$, donde $\dot z = -l\dot\theta \operatorname{sen}\theta$ e

$$\dot z^2 = l^2 \dot\theta^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

Como

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = (\dot\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi)^2 + (\dot\phi \operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta \operatorname{sen}\psi)^2$$
$$= \dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2,$$

a lagrangiana é

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{ml^2}{2}\dot\theta^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{I_1}{2}\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{I_1}{2}\dot\theta^2$$
$$+ \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta,$$

ou seja,

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{I_1 + ml^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2}\dot\theta^2 + \frac{I_1}{2}\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta.$$

(b) Os eixos fixos no corpo são eixos principais de inércia com origem no centro de massa do corpo.

(c) Como ψ e ϕ são variáveis cíclicas, temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = p_\psi = c^{te}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I_1 \dot\phi \operatorname{sen}^2\theta + I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\cos\theta = I_1\dot\phi \operatorname{sen}^2\theta + p_\psi \cos\theta = p_\phi = c^{te}. \quad (2)$$

Como x e y também são variáveis cíclicas,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x = p_x = c^{te}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot y} = m\dot y = p_y = c^{te}. \qquad (3)$$

A quinta constante de movimento é a energia:

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{I_1 + ml^2\operatorname{sen}^2\theta}{2}\dot\theta^2 + \frac{I_1}{2}\dot\phi^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 + mgl\cos\theta. \quad (4)$$

(d) Usando (1), (2) e (3) em (4) obtém-se

$$\frac{I_1 + m\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}{2}\dot\theta^2 + V_{ef}(\theta) = E', \qquad E' = E - \frac{p_x^2}{2m} - \frac{p_y^2}{2m} - \frac{p_\psi^2}{2I_3},$$

onde

$$V_{ef}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\operatorname{sen}^2\theta} + mgl\cos\theta.$$

Portanto, ~~extraindo~~ tomando a raiz quadrada positiva,

$$\frac{\sqrt{I_1 + m\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}}{\sqrt{2}}\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{E' - V_{ef}(\theta)} \implies \sqrt{2}\,t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(I_1 + ml^2\operatorname{sen}^2\theta')^{1/2}}{[E' - V_{ef}(\theta')]^{1/2}}\,d\theta'.$$

Isto determina t em função de θ por uma quadratura.
Uma inversão dá $\theta(t)$.
Tendo achado $\theta(t)$, da equação (2) temos

$$\dot\phi = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1\operatorname{sen}^2\theta} = \text{função conhecida de } t.$$

Uma integração (quadratura) dá $\phi(t)$.
Dispondo de $\theta(t)$ e $\phi(t)$, a equação (1) dá

$$\dot\psi = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot\phi\cos\theta = \text{função conhecida de } t.$$

Uma quadratura dá $\psi(t)$.
Finalmente, $x(t)$ e $y(t)$ são imediatamente determinadas integrando as equações (3).