GABARITO

MECÂNICA ANALÍTICA - 1/2019

PROVA 2 — 22/05/2019

PROFESSOR: NIVALDO A. LEMOS

NOME:

A PROVA É COMPOSTA POR QUATRO QUESTÕES

Questão 1. (2,0 pontos) Mostre que energia cinética de um corpo rígido em relação ao centro de massa ou a um ponto fixo O satisfaz a equação $dT/dt = \mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\omega}$, conhecida como *teorema da energia cinética.*

Usando eixos principais de inércia fixos no corpo e com origem no ponto O ou no CM, a energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right).$$

Portanto,

$$\frac{dT}{dt} = I_1\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3\omega_3\dot{\omega}_3 .$$

Pelas equações de Euler

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 = N_1 ,$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 = N_2 ,$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 = N_3 ,$$

temos

$$\frac{dT}{dt} = \omega_1\left[N_1 + (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3\right] + \omega_2\left[N_2 + (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1\right]$$
$$+\,\omega_3\left[N_3 + (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2\right]$$
$$= N_1\omega_1 + N_2\omega_2 + N_3\omega_3 + \underbrace{\left[I_2 - I_3 + I_3 - I_1 + I_1 - I_2\right]}_{=0}\omega_1\omega_2\omega_3 .$$

Portanto,

$$\frac{dT}{dt} = \vec{N}\cdot\vec{\omega} .$$

Questão 2. Uma nave espacial simétrica ($I_1 = I_2$) move-se no espaço sideral. Motores simetricamente situados aplicam um torque constante com única componente diferente de zero N_3 ao longo do eixo de simetria (terceiro eixo principal de inércia).
(a) **(1,0 ponto)** Se $\omega_3(0) = 0$, determine $\omega_3(t)$.
(b) **(1,0 ponto)** Prove que $\omega_1^2 + \omega_2^2$ é constante de movimento.
(c) **(1,0 ponto)** Considere as demais condições iniciais $\omega_1(0) = 0$ e $\omega_2(0) = \Omega$. Justifique por que é possível escrever $\omega_1(t) = \Omega \operatorname{sen}(\theta(t))$, $\omega_2(t) = \Omega\cos(\theta(t))$, onde $\theta(t)$ é uma função a ser determinada. Determine $\theta(t)$ e, consequentemente, $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$.

(a) Com $I_1 = I_2$ as equações de Euler tornam-se

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3)\,\omega_2\omega_3 = 0\,, \qquad (1)$$

$$I_1\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 = 0\,, \qquad (2)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = N_3\,. \qquad (3)$$

Como N_3 é constante e $\omega_3(0)=0$, uma integração imediata da Eq. (3) dá

$$\omega_3(t) = \frac{N_3}{I_3}t.$$

(b) Temos

$$\frac{d}{dt}(\omega_1^2+\omega_2^2) = 2(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2)$$

e, usando as Eqs. (1) e (2),

$$\frac{d}{dt}(\omega_1^2+\omega_2^2) = 2\left[\frac{I_1-I_3}{I_1}\omega_2\omega_3\omega_1 + \frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_3\omega_1\omega_2\right] =$$

$$= \frac{2\omega_1\omega_2\omega_3}{I_1}(I_1 - I_3 + I_3 - I_1) = 0.$$

Portanto,

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = c^{\underline{te}}.$$

(c) Com $\omega_1(0)=0$ e $\omega_2(0)=\Omega$, segue-se que

$$\omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2 = c^{\underline{te}} \Rightarrow c^{\underline{te}} = \Omega^2.$$

Logo,

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = \Omega^2$$

e podemos escrever

$$\omega_1(t) = \Omega \operatorname{sen}\theta(t), \quad \omega_2(t) = \Omega\cos\theta(t) \qquad (4)$$

porque $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Substituindo (4) em (1) e (2) resultam

$$I_1 \Omega \cos\theta\, \dot{\theta} - (I_1 - I_3)\, \Omega \cos\theta\, \omega_3 = 0,$$

e

$$-I_1 \Omega \,\mathrm{sen}\,\theta\, \dot{\theta} - (I_3 - I_1)\, \omega_3 \Omega \,\mathrm{sen}\,\theta = 0.$$

Ambas as equações acima dão

$$\dot{\theta} = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\, \omega_3 = \frac{(I_1 - I_3) N_3}{I_1 I_3}\, t$$

Devemos ter $\theta(0) = 0$ porque $\omega_1(0) = 0$ e $\omega_2(0) = \Omega$. Portanto,

$$\theta(t) = \alpha t^2, \quad \alpha = \frac{(I_1 - I_3) N_3}{2 I_1 I_3} = c^{te}.$$

Conclusão:

$$\omega_1(t) = \Omega \,\mathrm{sen}\,(\alpha t^2), \quad \omega_2(t) = \Omega \cos(\alpha t^2).$$

Questão 3. (1,0 ponto) Uma partícula de massa m move-se no semieixo $x > 0$ com energia potencial

$$V(x) = V_0\,(e^{-kx} + Cx)\,,$$

onde todas as constantes são positivas. Determine para que valores das constantes existem posições de equilíbrio e encontre a frequência das pequenas oscilações em torno das posições de equilíbrio estável.

As posições de equilíbrio são as soluções de

$$\frac{dV}{dx} = V_0\left[-k e^{-kx} + C\right] = 0\,,$$

donde

$$e^{-kx} = \frac{C}{k} \implies x = x_0 = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{k}{C}\right)$$

desde que

$$\frac{k}{C} > 1$$

para que se tenha $x_0 > 0$. Suponhamos, portanto, que $k > C$.

A segunda derivada de V em $x = x_0$ é

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} = V_0 k^2 e^{-kx_0} = V_0 k^2 \frac{C}{k} = V_0 C k > 0.$$

Logo, a posição é de equilíbrio estável e a frequência das pequenas oscilações em torno de $x = x_0$ é

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} = \sqrt{\frac{V_0 C k}{m}}\,.$$

Questão 4. Considere o sistema mecânico representado na figura abaixo. As duas partículas têm a mesma massa m e todas as molas, de mesmo comprimento natural a, estão relaxadas na situação de equilíbrio.

(a) **(1,0 ponto)** Mostre que a lagrangiana do sistema, em termos dos deslocamentos η_1 e η_2 de cada partícula em relação às respectivas posições de equilíbrio, é

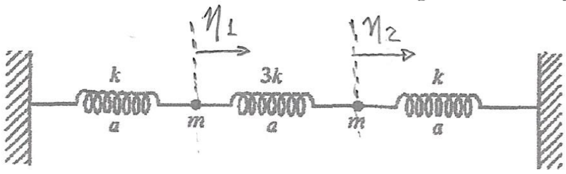
$$L = \frac{m}{2}(\dot\eta_1^2 + \dot\eta_2^2) - \frac{k}{2}(4{\eta_1}^2 + 4{\eta_2}^2 - 6\eta_1\eta_2).$$

(b) **(1,0 ponto)** Identifique as matrizes $\mathbf{T} = (T_{kl})$ e $\mathbf{V} = (V_{kl})$ comparando a lagrangiana acima com a forma padrão

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k,l} T_{kl}\,\dot\eta_k\,\dot\eta_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} V_{kl}\,\eta_k\,\eta_l.$$

(c) **(1,0 ponto)** Determine as frequências características e os modos normais de vibração.

(d) **(1,0 ponto)** Justifique fisicamente os valores encontrados para as frequências características.



(a) A lagrangiana é $L = T - V$, isto é,

$$T = \frac{m}{2}(\dot\eta_1^2 + \dot\eta_2^2) - \frac{k}{2}\eta_1^2 - \frac{k}{2}\eta_2^2 - \frac{3k}{2}(\eta_2 - \eta_1)^2$$

$$= \frac{m}{2}(\dot\eta_1^2 + \dot\eta_2^2) - \frac{k}{2}\left[\eta_1^2 + \eta_2^2 + 3(\eta_2^2 + \eta_1^2 - 2\eta_1\eta_2)\right]$$

$$= \frac{m}{2}(\dot\eta_1^2 + \dot\eta_2)^2 - \frac{k}{2}(4\eta_1^2 + 4\eta_2^2 - 6\eta_1\eta_2).$$

(b) Comparando com a forma padrão:

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 4k & -3k \\ -3k & 4k \end{pmatrix}.$$

(c) Frequências características:

$$\det(V - \omega^2 T) = \det\begin{pmatrix} 4k - m\omega^2 & -3k \\ -3k & 4k - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (4k - m\omega^2)^2 - 9k^2 = 0 \Rightarrow 4k - m\omega^2 = \pm 3k.$$

Sinal $(+)$: $m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \omega_1 = \sqrt{k/m}$.

Sinal $(-)$: $m\omega^2 = 7k \Rightarrow \omega = \omega_2 = \sqrt{7k/m}$.

Modos normais:

$$\omega = \omega_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4K-K & -3K \\ -3K & 4K-K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3K & -3K \\ 3K & -3K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\rho^{(1)} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4K-7K & -3K \\ -3K & 4K-7K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3K & -3K \\ -3K & -3K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c = -d$$

$$\rho^{(2)} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(e) Fisicamente: o modo 1 é tal que $\eta_1 = \eta_2$ e tudo se passa como se a mola de constante elástica $3K$ não existisse, já que ela permanece relaxada. Cada partícula de massa m se move como se estivesse ligada apenas a uma mola de constante elástica K. Portanto,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

No caso do modo 2, $\eta_1 = -\eta_2$ e a mola central permanece deformada de $2\eta_2$. Portanto, a força restauradora sobre a partícula 2 é

$$F_{el} = -3K(2\eta_2) - K\eta_2 = -7K\eta_2.$$

O mesmo se dá com a partícula 1. Logo, a frequência do modo 2 é

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{7K}{m}}.$$