.

4^a LISTA DE MECÂNICA QUÂNTICA II

(2017-1)

1. Considere uma partícula espalhada por um potencial do tipo função delta com simetria esférica: $V(r) = \alpha\, \delta(r - a)$, onde α e a são constantes.

   (a) Construa a expansão em ondas parciais para a onda espalhada e obtenha os deslocamentos de fase associados a cada componente.

   (b) Obtenha a seção de choque de espalhamento no limite de baixas energias, ou seja, $a << \lambda$.

   (c) Obtenha a amplitude de espalhamento utilizando a aproximação de Born. Tome o limite de baixa energia e compare com o resultado obtido no item anterior.

2. Considere uma partícula de massa m sob ação do potencial central

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a \, . \end{cases}$$

   onde V_0 é uma constante positiva.

   (a) Escreva a equação radial para a função de onda da partícula. Obtenha a solução associada ao estado ligado ($E < 0$) com $l = 0$ (onda s).
   Resposta:

$$u_0(r) = \begin{cases} A\, e^{-\alpha\, r} & r > a \\ B\, \mathrm{sen}\Big(\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}\, r\Big) & r < a \, , \end{cases}$$

   onde $k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}$ e $\alpha = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$.

   (b) Escreva a condição de continuidade da função de onda em $r = a$, e mostre a seguinte relação que determina a energia do estado ligado com $l = 0$:

$$\tan\left(\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}\, a\right) = -\frac{\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}}{\alpha} \, .$$

   Mostre que não há estado ligado se a profundidade do potencial (V_0) for muito pequena.

   (c) Obtenha a solução associada ao espalhamento da partícula ($E > 0$) com $l = 0$ (onda s).
   Resposta:

$$u_0'(r) = \begin{cases} A\, \mathrm{sen}(k\, r + \delta_0) & r > a \\ B\, \mathrm{sen}\Big(\sqrt{k_0^2 + k^2}\, r\Big) & r < a \, , \end{cases}$$

   onde $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

3. Use a aproximação de Born para calcular a seção de choque de espalhamento para o poencial de Yukawa:

$$V(r) = V_0\, \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha\, r}$$

4. Considere duas partículas idênticas, de massa m, confinadas em um poço quadrado de largura a:

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & 0 < x_1 < a \quad \text{e} \quad 0 < x_2 < a \\ \infty & x_1\,,\, x_2 \leq 0 \quad \text{ou} \quad x_1\,,\, x_2 \geq a\,. \end{cases}$$

Supondo que o estado de spin das partículas é simétrico:

(a) Construa as funções de onda dos dois primeiros níveis de energia de bósons e férmions, partindo das funções de onda de uma partícula:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi\, x}{a}\right)\;.$$

(b) Determine as energias permitidas a bósons e férmions.

(c) Suponha que as partículas sejam levemente perturbadas por uma interação mútua do tipo

$$V'(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m\Omega^2 \left(x_1 - x_2\right)^2\;.$$

($\hbar\Omega << \hbar^2\pi^2/2ma^2$). Determine a correção na energia do estado fundamental de férmions e bósons em primeira ordem da teoria de perturbação .

(d) Determine a correção na energia do primeiro estado excitado de bósons e compare com o resultado do item anterior para férmions. Discuta fisicamente a diferença entre os dois resultados.

5. Duas partículas idênticas encontram-se sob a ação de um potencial harmônico com hamiltoneano

$$H = \hbar\omega\,(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1)\;.$$

O sistema é afetado por uma perturbação do tipo

$$V = ig(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1)\;.$$

Determine a correção de primeira ordem dos dois primeiros níveis de energia de:

(a) Partículas distinguíveis,

(b) Bósons,

(c) Férmions.