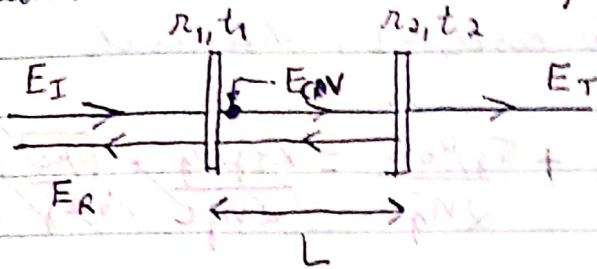


III - Interferômetro Fabry-Perot e Cavidades Ópticas

O interferômetro Fabry-Perot é formado por dois espelhos semi-transparentes paralelos, dispostos a uma distância L , constituindo uma "cavidade óptica".



Os coeficientes de reflexão e transmissão dos espelhos são (r_1, t_1) e (r_2, t_2) . Ao iluminarmos este interferômetro com um feixe laser, temos um campo refletido E_R , um transmitido E_T e um campo intracavidade E_{IN} . Vamos calcular estes campos em termos do campo incidente E_I e dos coeficientes (r_1, t_1) e (r_2, t_2) . Os campos refletido, transmitido e intracavidade são resultantes das múltiplas reflexões e transmissões nos dois espelhos que formam o interferômetro. A princípio, consideraremos os espelhos planos e infinitos, e os campos envolvidos como ondas planas. O campo intracavidade representa uma configuração de onda estacionária.

Dados os coeficientes de reflexão e transmissão dos espelhos, podemos ~~calcular~~ obter as relações ~~seguintes~~ seguintes para as amplitudes dos campos:

OBS. TROCAR E_0 COM E_{CIN}

$$E_{\text{OR}} = -r_1 E_0 + t_1 E_{\text{CAN}} r_2 e^{i\delta} \quad (1A)$$

$$E_{\text{OT}} = t_2 E_{\text{CAN}} e^{i\delta/2}, \quad (1B)$$

onde E_0 , E_{OR} , E_{OT} , E_{CAN} são, respectivamente, as amplitudes dos campos incidente, refletido, transmitido e intracavidade. Assim, calculando-se, por exemplo, a amplitude do campo transmitido em termos de E_0 , podemos obter, a partir das eqs. (1A) e (1B), as amplitudes dos campos refletido e intracavidade. O campo transmitido é o resultado da superposição de sucessivas transmissões no espelho de saída, levando-se em conta a fase adquirida no trajeto de ida e volta na cavidade antes de cada transmissão:

$$E_{\text{OT}} = t_1 t_2 E_0 + t_1 t_2 r_1 r_2 e^{i\delta} E_0 + t_1 t_2 (r_1 r_2)^2 e^{2i\delta} E_0 + \dots$$
$$t_1 t_2 (r_1 r_2)^m e^{im\delta} E_0 \dots = t_1 t_2 E_0 \sum_{m=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{i\delta})^m, \quad (2)$$

onde $\delta = 2\pi K_0 L = \frac{4\pi}{\lambda_0} nL$ é a fase adquirida pelo campo em uma ida e volta na cavidade. A série da eq. (2) pode ser facilmente somada dando

$$E_{\text{OT}} = \frac{t_1 t_2 E_0 e^{i\delta/2}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}}. \quad (3)$$

Ⓜ e n é o índice de refração do material no interior da cavidade.

Das eqs. (1A) e (1B) obtemos ainda

$$E_{OAV} = \frac{t_1 E_0}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} \quad (4)$$

$$E_{OR} = -r_1 E_0 + \frac{t_1^2 E_0 r_2 e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} \quad (5)$$

- Intensidade do campo transmitido:

$$I_T = I_0 \frac{|t_1 t_2|^2}{|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2}, \quad (6)$$

onde I_0 é a intensidade do campo incidente. Fazendo,

$$r_1 = |r_1| e^{i\delta_1} \quad \text{e} \quad r_2 = |r_2| e^{i\delta_2}, \quad (7)$$

e definindo

$\omega \tau$ tempo de ida e volta

$$\Delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta = \delta_1 + \delta_2 + 2n \frac{\omega L}{c}, \quad (8)$$

podemos calcular o denominador da eq. (6):

$$|1 - r_1 r_2 e^{i\delta}|^2 = (1 - |r_1| |r_2| \cos \Delta)^2 + |r_1|^2 |r_2|^2 \sin^2 \Delta$$

$$= 1 - 2|r_1| |r_2| \cos \Delta + |r_1|^2 |r_2|^2$$

$$= (1 - |r_1| |r_2|)^2 + 4|r_1| |r_2| \sin^2(\Delta/2)$$

Assim, a intensidade transmitida pode ser escrita como

$$I_T = I_0 \frac{T_1 T_2}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2} \frac{1}{1 + F \text{sen}^2(\Delta/2)}, \quad (9)$$

onde $R_j \equiv |r_j|^2$, $T_j \equiv |t_j|^2$ e

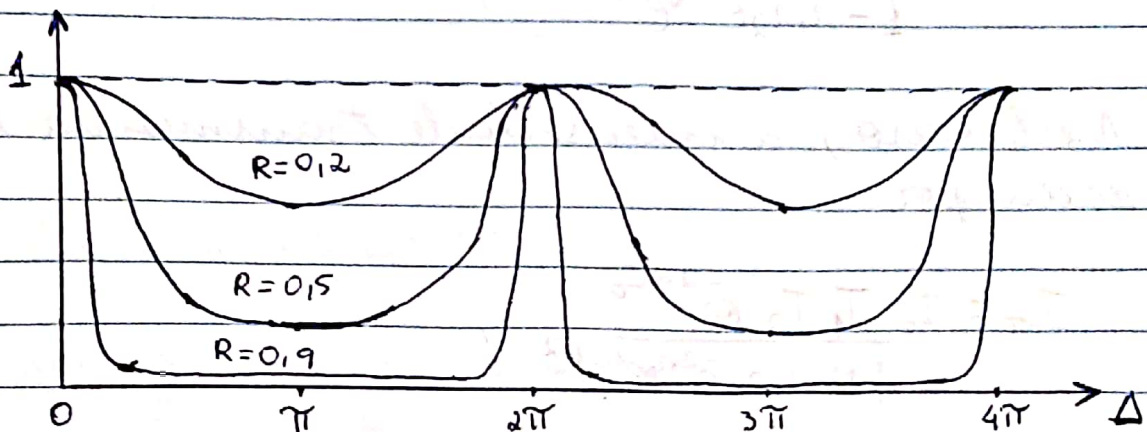
$$F \equiv \frac{4 \sqrt{R_1 R_2}}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2} \quad (10)$$

é chamado "coeficiente de finesse da cavidade". O último termo da eq. (9):

$$\frac{1}{1 + F \text{sen}^2(\Delta/2)}$$

é chamado função de Airy. Para uma cavidade simétrica $R_1 = R_2 = R$ e

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$



- Efeitos de perdas intracavidade.

Vamos considerar que a cavidade está preenchida com um meio dissipativo, com coef. de abs. $\propto \frac{1}{L_0}$ de modo que a amplitude do campo seja atenuada por um fator $e^{-2\alpha L_0}$ em cada ida e volta na cavidade.

Neste caso, a amplitude do campo transmitido é:

$$\begin{aligned} E_{OT} &= t_1 t_2 E_0 e^{-\alpha L_0} + t_1 r_1 r_2 t_2 E_0 e^{i\delta} e^{-3\alpha L_0} + \\ & t_1 (r_1 r_2)^2 t_2 E_0 e^{2i\delta} e^{-5\alpha L_0} + \dots + \\ & t_1 (r_1 r_2)^m t_2 E_0 e^{mi\delta} e^{-(2m+1)\alpha L_0} + \dots \\ &= t_1 t_2 E_0 e^{-\alpha L_0} \sum_{m=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2\alpha L_0} e^{i\delta})^m \quad (11) \end{aligned}$$

Novamente, temos a série geométrica, de modo que:

$$E_{OT} = \frac{t_1 t_2 E_0 e^{-\alpha L_0}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\alpha L_0} e^{i\delta}} \quad (12)$$

Neste caso, a intensidade transmitida é dada por

$$I_T = I_0 \frac{T_1 T_2 e^{-2\alpha L_0}}{|1 - r_1 r_2 e^{-2\alpha L_0} e^{i\delta}|^2}$$

onda

$$\begin{aligned} |1 - r_1 r_2 e^{-2\alpha L_0} e^{i\delta}|^2 &= (1 - |r_1| |r_2| e^{-2\alpha L_0} \cos \Delta)^2 + |r_1|^2 |r_2|^2 e^{-4\alpha L_0} \sin^2 \Delta \\ &= 1 - 2 |r_1| |r_2| e^{-2\alpha L_0} \cos \Delta + |r_1|^2 |r_2|^2 e^{-4\alpha L_0} \\ &= (1 - |r_1| |r_2| e^{-2\alpha L_0})^2 + 4 |r_1| |r_2| e^{-2\alpha L_0} \sin^2(\Delta/2). \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$I_T = I_0 \frac{T_1 T_2 e^{-2\alpha L_0}}{(1 - \sqrt{R_1 R_2} e^{-2\alpha L_0})^2} \cdot \frac{1}{1 + F \sin^2(\Delta/2)} \quad (13)$$

com

$$F = \frac{4 \sqrt{R_1 R_2} e^{-2\alpha L_0}}{(1 - \sqrt{R_1 R_2} e^{-2\alpha L_0})^2} \quad (14)$$

- Intervalo espectral livre

As freqs. de ressonância da cavidade são dadas por:

$$\Delta = 2m\pi = \delta_1 + \delta_2 + \frac{2n\omega_m L}{c}$$

Portanto,

$$\Delta\omega = \omega_{m+1} - \omega_m = \frac{\pi c}{L n}$$

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{c/n}{2L} = 1/2, \quad (15)$$

onde τ é o tempo de ida e volta na cavidade. ~~$\Delta\nu$~~ $\Delta\nu$ é o intervalo entre duas frequências de ressonância, também chamado "intervalo espectral livre" (free spectral range).

— Largura de linha das ressonâncias:

Para uma cavidade de alta finesse, $F \gg 1$, os picos de ressonância são bastante estreitos e centrados em $\Delta_m = 2m\pi$ ($m=0,1,2,\dots$). A função de Airy cai rapidamente à medida que nos afastamos de um dos picos Δ_m , de modo que os valores não ~~desprezíveis~~ da função só ocorrem para $\Delta \sim \Delta_m$. Neste caso, em torno de cada pico, podemos ~~for~~ aproximar a função de Airy por uma lorentziana:

$$\frac{1}{1 + F \sin^2(\Delta/2)} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{F}{4} (\Delta - \Delta_m)^2} \quad (16)$$

A largura à meia altura é dada por

$$\delta\Delta = 2 \times \frac{2}{\sqrt{F}} = \frac{2nL}{c} \delta\omega$$

$$\Rightarrow \delta\omega = \frac{2c}{nL\sqrt{F}} = \frac{4}{\tau\sqrt{F}}, \quad (17)$$

onde τ é o tempo de ida e volta na cavidade.

Uma vez que $\delta W = 2\pi \delta V$, temos

$$\delta V = \frac{2}{\pi \sqrt{F}} = \frac{2\Delta V}{\pi \sqrt{F}}, \quad (18)$$

onde usamos a eq. (15) na 2ª igualdade. Portanto da eq. (18) obtemos ainda que

$$F = \left(\frac{2}{\pi} \frac{\Delta V}{\delta V} \right)^2. \quad (19)$$

A eq. (19) é bastante útil quando precisamos determinar as perdas intracavidades devido à inserção de algum material no interior desta. De fato, as perdas aumentam o valor de δV , mas não alteram ΔV . Assim, medindo-se F com e sem o material absorvedor no interior da cavidade, podemos estimar o coeficiente de absorção α . De fato, das eqs. (14) e (19) temos que

$$\frac{\delta V}{\Delta V} = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \sqrt{R_1 R_2} e^{-2\alpha L_0}}{2 \sqrt{R_1 R_2} e^{\alpha L_0}}. \quad (20)$$

Subondo que as perdas intracavidade sejam pequenas, $\alpha L_0 \ll 1$, e que os espelhos da cavidade são altamente refletivos, ou seja, $T_j = 1 - R_j \ll 1$, podemos expandir o quociente da eq. (20), ~~obtido~~ e guardar apenas os termos

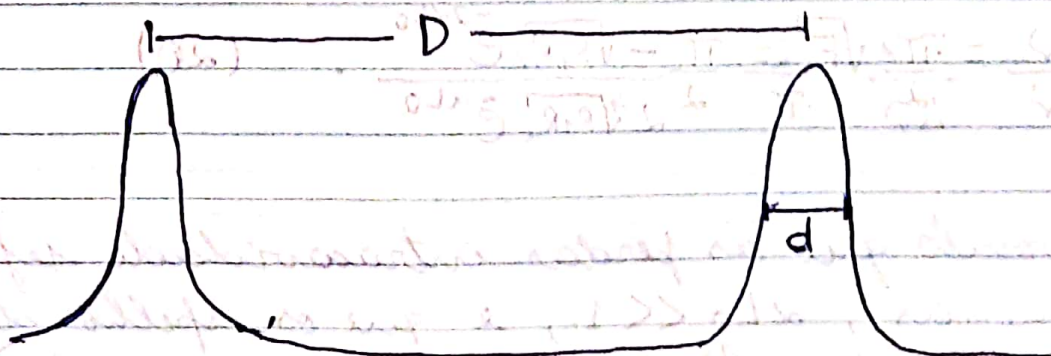
de 1ª ordem em T_1, T_2 e αL_0 . Neste caso, encontramos que

$$\pi \frac{\delta V}{\Delta V} \approx \frac{T_1 + T_2}{2} + 2\alpha L_0. \quad (21)$$

Portanto, as perdas intracavidade não diretamente obtidas de:

$$2\alpha L_0 \approx \pi \left(\left. \frac{\delta V}{\Delta V} \right|_{\alpha} - \left. \frac{\delta V}{\Delta V} \right|_{\alpha=0} \right). \quad (22)$$

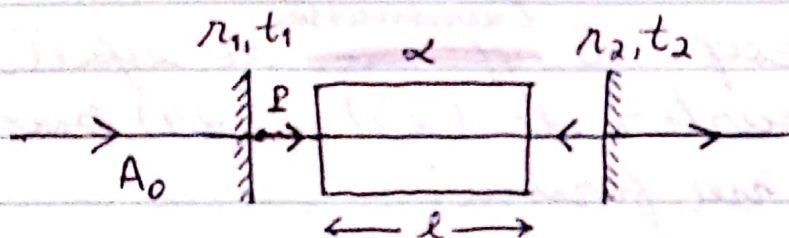
A eq. (22) é importante, pois fornece as perdas ~~intracavidade~~ a partir de medidas espectrais da cavidade. O resultado independente da unidade de frequência utilizada, fornecendo um método simples de estimativa das perdas intracavidade a partir de uma representação gráfica do pente de frequências.



$$2\alpha L_0 \approx \pi \left(\left. \frac{d}{D} \right|_{\alpha} - \left. \frac{d}{D} \right|_{\alpha=0} \right)$$

- Dinâmica de uma cavidade óptica.

Suponhamos que o campo no interior de uma cavidade óptica sofre alguma perturbação em relação ao seu estado estacionário. Queremos ser capazes de determinar o comportamento dinâmico do campo. Assim sendo, vamos considerar a situação descrita na figura abaixo:



Uma cavidade óptica é formada por dois espelhos com coef. de reflexão r_1 e r_2 , e contém no seu interior um meio material de comprimento l e coef. de absorção α . Tomemos o campo no ponto P , adjacente ao espelho de entrada da cavidade (OBS: a escolha da posição P é arbitrária):

$$E_p(t) = A(t) \bar{e}^{-i\omega t}, \quad (23)$$

onde ω é a frequência central do campo e $A(t)$ é ~~uma~~ uma amplitude "lentamente" variável, isto é, $A(t)$ varia pouco durante um período óptico $T = 2\pi/\omega$. O campo

incidente na cavidade é da forma

$$E_0 = A_0 e^{-i\omega t}. \quad (24)$$

Podemos escrever uma relação de recorrência temporal p/ ~~o~~ E_p durante o intervalo de tempo τ de ida e volta na cavidade:

$$E_p(t+\tau) = E_p(t) \cdot r_1 r_2 e^{-2\alpha l} + t_1 E_0(t+\tau), \quad (25)$$

onde t_1 é o coef. de ^{transmissão} ~~reflexão~~ do espelho de entrada. A partir de (23) e (24) podemos reescrever (25) na forma:

$$A(t+\tau) = A(t) r_1 r_2 e^{-2\alpha l} e^{i\omega\tau} + t_1 A_0. \quad (26)$$

Podemos entender as eqs. (25) e (26) da seguinte forma: O campo em P no instante $t+\tau$ é a superposição do campo incidente na cavidade neste instante, transmitido pelo espelho de entrada, e do campo em P que viajou no interior da cavidade, refletindo nos dois espelhos e sendo absorvido nas duas passagens pelo meio material. Esta segunda contribuição é expressa em termos do campo em P no instante anterior t , e dos parâmetros da cavidade (r_1 e r_2) e do ^{meio} material (αl). Além disso, o campo que viajou pela cavidade deve interferir

com ~~o~~ o campo incidente transmitido, com uma diferença de fase que aparece explicitamente na eq. (26). Esta é uma equação de recorrência para a evolução temporal da amplitude do campo, a qual poderá ser aproximada por uma evolução contínua a partir de algumas hipóteses razoáveis.

Em primeiro lugar, vamos considerar que o meio material é fracamente absorvedor, ou seja, $\alpha l \ll 1$. Neste caso,

$$\bar{E}^{-2\alpha l} \approx 1 - 2\alpha l. \quad (27)$$

Além disso, seja ω_0 a freq. de resson. da cavidade mais próxima de ω , e $\Delta = \omega_0 - \omega$. Os coef. de reflexão r_1 e r_2 são da forma:

$$r_{ij} = |r_{ij}| e^{i\delta_{ij}} = \sqrt{1-T_{ij}} e^{i\delta_{ij}}, \quad (28)$$

onde T_1 e T_2 são as transmissividades dos espelhos. A condição de ressonância corresponde a uma interf. construtiva entre o campo incidente num dado instante e o campo ~~vicinho~~ que descreveu uma ida e volta na cavidade, de modo que

$$e^{i\omega_0 z} e^{i(\delta_1 + \delta_2)} = 1 \quad (29)$$

$$\Rightarrow e^{i\omega z} r_1 r_2 = \sqrt{1-T_1} \sqrt{1-T_2} \bar{E}^{-i\Delta z}$$

Além da hipótese feita na eq. (27), suporemos ainda que os espelhos possuem baixa transmissividade ($T_j \ll 1$) e que o sistema opera próximo à ressonância, de modo que $\Delta\omega \ll 1$. Neste caso, podemos fazer as seguintes aproximações:

$$\sqrt{1 - T_j} \approx 1 - T_j/2$$

$$e^{-i\Delta\omega\tau} \approx 1 - i\Delta\omega\tau \quad (30)$$

Finalmente, substituindo as eqs. (27)-(30) em (26) obtemos:

$$A(t+\tau) = A(t) \left[1 - 2\alpha\ell - \frac{(T_1+T_2)}{2} - i\Delta\omega\tau \right] + t_1 A_0. \quad (31)$$

A partir da eq. (31), podemos fazer uma aproximação contínua para a evolução da amplitude do campo fazendo:

$$\dot{A} \approx \frac{A(t+\tau) - A(t)}{\tau}, \quad (32)$$

o que nos leva a

$$\dot{A} = -(\gamma + i\Delta)A + \frac{\sqrt{T_1}}{\tau} A_0, \quad (33)$$

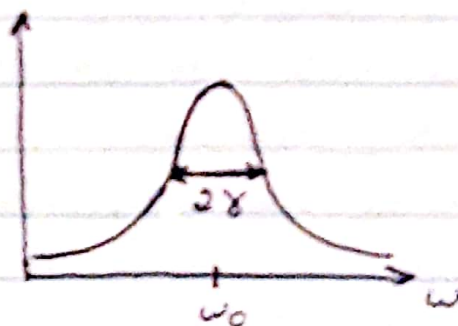
onde definiremos o coeficiente de perdas da cavidade:

$$\gamma = \frac{2\alpha l}{c} + \frac{T_1 + T_2}{2c} \quad (34)$$

É interessante calcularmos o estado estacionário obtido a partir de (33). Fazendo $\dot{A} = 0$, obtemos:

$$A_s = \frac{(\sqrt{T_1}/c) A_0}{\gamma + i\Delta} \Rightarrow I_s = \frac{(T_1/c^2) I_0}{\gamma^2 + \Delta^2}, \quad (35)$$

onde $I = |A|^2$. Portanto, no domínio de frequências, as aproximações feitas na dedução de (33) correspondem a aproximarmos um dos picos da curva de Airy da cavidade por uma Lorentziana. De fato, esta aproximação já foi discutida na eq. (16). Da eq. (35), temos que a largura à meia altura da intensidade estacionária I_s em função de ω é $\delta\omega = 2\gamma$.



Uma vez que $\delta\omega = 2\pi\delta\nu$, obtemos que

$$\pi \delta\nu = \gamma \Rightarrow \pi \epsilon \delta\nu = 2\alpha l + \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (36)$$

Finalmente, lembrando que o intervalo espectral livre da cavidade é $\Delta\nu = 1/\epsilon$, vemos que a eq. (36) é idêntica a (21) que foi obtida a partir de uma aproximação Lorentziana para a curva de Airy. Portanto, a equação dinâmica (33) deve valer para cavidades de alta finesse, de modo que as ressonâncias estão bem resolvidas e os picos da curva de Airy possuem uma forma aproximadamente Lorentziana.

