

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = i \frac{\chi \omega_1}{2n_1 c} A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z} \quad (52A)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = i \frac{\chi \omega_2}{2n_2 c} A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z} \quad (52B)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = i \frac{\chi \omega_3}{2n_3 c} A_1 A_2 e^{i\Delta k z} \quad (52C)$$

- Casamento de Fase:

Para entendermos o papel de Δk , vamos supor que iluminamos o meio não-linear, de comprimento L , ~~com~~ com as frequências ω_1 e ω_2 , gerando o campo de freq. ω_3 . Se pudermos supor que ~~o~~ L é pequeno o suficiente para que A_1 e A_2 sejam aproximadamente constantes, então podemos integrar (52C) e obter:

$$A_3(L) = i \frac{\chi \omega_3}{2n_3 c} A_1 A_2 \int_0^L e^{i\Delta k z} dz$$

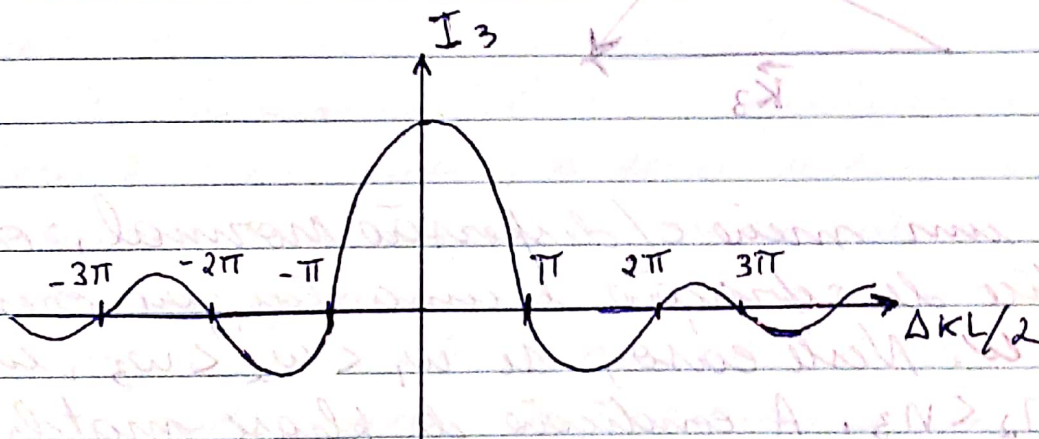
$$= i \frac{\chi \omega_3}{2n_3 c} A_1 A_2 \left(\frac{e^{i\Delta k L} - 1}{i\Delta k} \right)$$

A intensidade $\sqrt{I_3}$ do campo gerado é proporcional a $|A_3|^2$. Portanto, temos que

$$I_3 \propto \left| \frac{e^{i\Delta K L} - 1}{i\Delta K} \right|^2 = L^2 \frac{\sin^2(\Delta K L/2)}{(\Delta K L/2)^2}$$

$$\text{ou } I_3 \propto L^2 \text{senc}^2(\Delta K L/2), \quad (53)$$

onde $\text{senc}(x) \equiv \sin x/x$ é a função "seno cardinal" cuja representação gráfica possui um máximo em $x=0$. Fazendo a curva de I_3 em função de $(\Delta K L/2)$, temos



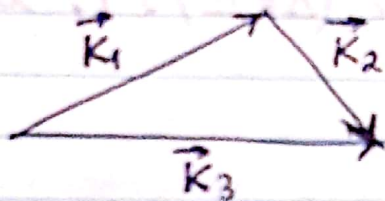
Portanto, a eficiência de conversão decresce à medida que $\Delta K \cdot L$ aumenta. A razão para isto é que quando L é maior que $1/\Delta K$, o campo gerado fica fora de fase com a própria polarização não-linear que lhe serve de fonte. Ocorre, então, uma interferência destrutiva entre os campos gerados em diferentes posições do cristal. Por isto, uma conversão eficiente requer a condição:

$$\Delta \mathbf{k} = 0, \quad (54)$$

usualmente chamada de "condição de casamento ou acordo de fase" (phase match).

Em 3D, temos a relação vetorial

$$\Delta \vec{\mathbf{k}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathbf{k}}_1 + \vec{\mathbf{k}}_2 = \vec{\mathbf{k}}_3. \quad (55)$$



Em um meio c/ dispersão normal, o índice de refração é uma função crescente de ω . Neste caso, se $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, então $n_1 < n_2 < n_3$. A condição de phase match (10) pode também ser expressa como:

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 = n_3 \omega_3. \quad (56)$$

Ao mesmo tempo devemos ter:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \quad (57)$$

As duas condições não podem ser satisfeitas simultaneamente. De fato, podemos calcular a diferença

$$n_3 - n_2 = \frac{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 - n_2 \omega_3}{\omega_3} = \frac{n_1 \omega_1 + n_2 (\omega_2 - \omega_3)}{\omega_3}$$

$$\Rightarrow n_3 - n_2 = \frac{(n_1 - n_2) \omega_1}{\omega_3} \quad (58)$$

Como $n_1 < n_2 < n_3$, os dois lados da equação acima terão sinais opostos, de modo que a igualdade não pode ser satisfeita.

Uma forma de se contornar este problema é utilizando-se a dispersão anômala. Contudo, a maneira usual de se obter o casamento de fase utiliza o efeito de birrefringência. Neste caso, o feixe de freq. ω_3 deve possuir a polarização correspondente ao menor índice de refração. Por exemplo, para um cristal uniaxial negativo, isto corresponde à polarização extraordinária. Para as freqs. ω_1 e ω_2 há duas possíveis escolhas:

- 1-) TIPO I : ambos c/ mesma polarização
- 2-) TIPO II : c/ polarizações ortogonais.

Para casamento de fase do tipo II, a condição de casamento de fase é mais fácil se $\omega_2 \neq \omega_1$. Em geral, a condição de casamento de fase tipo I é mais facilmente alcançada. Podemos resumir as condições de casamento de fase por birrefringência pela tabela:

UNIAXIAL POSITIVO

UNIAXIAL NEGATIVO

TIPO I

$$n_3^o \omega_3 = n_1^e \omega_1 + n_2^e \omega_2$$

$$n_3^e \omega_3 = n_1^o \omega_1 + n_2^o \omega_2$$

TIPO II

$$n_3^o \omega_3 = n_1^o \omega_1 + n_2^e \omega_2$$

$$n_3^e \omega_3 = n_1^e \omega_1 + n_2^o \omega_2$$

$$n_e > n_o$$

$$n_e < n_o$$

A condição de casamento de fase requer o controle preciso dos índices de refração envolvidos. Tipicamente, a condição de casamento de fase é obtida por dois métodos: controle angular e controle de temperatura.

— Sintonia ou controle angular:

Se quisermos satisfazer a cond. de casam. de fase em um cristal birrefringente qualquer, devemos orientar os feixes interagentes de modo que

$$\omega_3 n(\omega_3, \theta_3, \phi_3) \hat{k}_3 = \omega_1 n(\omega_1, \theta_1, \phi_1) \hat{k}_1 + \omega_2 n(\omega_2, \theta_2, \phi_2) \hat{k}_2 \quad (59)$$

onde θ_i e ϕ_i são as coords. angulares esféricas dos vetores de onda \vec{k}_i ($i=1,2,3$). Para cada frequência, $n(\theta, \phi)$ é obtida a partir da sol. da eq. (9) do cap. I. Fazendo

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi, \quad k_y = k \sin \theta \sin \phi, \quad k_z = k \cos \theta$$

$$k = n(\theta, \phi) k_o = n(\theta, \phi) \omega / c$$

a eq. (9) do cap. I pode ser reescrita como:

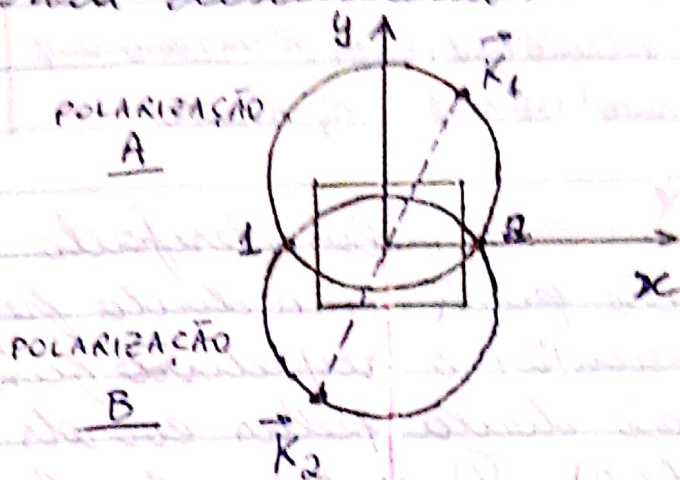
$$\begin{vmatrix} n_x^2 - n^2(\sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\theta) & n^2 \sin\theta \sin\phi \cos\theta & n^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi \\ n^2 \sin\theta \sin\phi \cos\theta & n_y^2 - n^2(\sin^2\theta \cos^2\phi + \cos^2\theta) & n^2 \sin\theta \cos\theta \sin\phi \\ n^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi & n^2 \sin\theta \cos\theta \sin\phi & n_z^2 - n^2 \sin^2\theta \end{vmatrix} = 0 \quad (60)$$

Assim, para obtermos o valor desejado do índice de refração para uma dada freq., devemos ~~de~~ orientar o respectivo eixo segundo a direção dada pelas coordenadas (θ, ϕ) que satisfazem (60). Dois tipos de solução devem surgir, uma para cada tipo de polarização.

Para um cristal uniaxial ($n_x = n_y = n_o$ e $n_z = n_e$) o determinante da eq. (60) deve anular-se para todo θ e ϕ quando fazemos $n = n_o$, pois a pol. ordinária "vê" o índice n_o para qualquer direção de propagação. Por outro lado, se ~~se~~ ~~tomarmos~~ tomarmos um valor de n entre n_o e n_e , o determinante torna-se indep. de ϕ , de ~~de~~ ^{modo que} valor desejado de n vale para qualquer direção sobre um cone cuja abertura é dada pela solução para θ . Este caso já foi discutido no cap. I.

No caso de um cristal biaxial, a situação é mais complexa. Vamos analisar o caso degenerado, com $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ e $\omega_3 = 2\omega$. A condição de casamento de fase tipo II tem interesse particular para a área de Informação Quântica, devido às recentes demonstrações

de emaranhamento em estados de polarização de fótons gerados por conversão paramétrica descendente.



Para o casamento de fase tipo II, os feixes de baixa frequência possuem polarizações ortogonais. Supondo que o feixe de freq. ω_3 propaga-se ao longo do eixo z, e possui polarização x, a eq. (59) será satisfeita para vetores de onda \vec{k}_1 e \vec{k}_2 dispostos sobre duas sup. cônicas conforme a figura acima.

~~Estas superfícies correspondem a duas polarizações ortogonais.~~ Cada uma destas superfícies corresponde a uma polarização. Elas se cruzam sobre os eixos óticos do cristal, os quais possuem o mesmo índice para as duas polarizações. Portanto, sobre o cruzamento dos dois cones, a eq. (59) reduz-se a

$$2n_x(2\omega) \hat{k}_z = n(\omega, \theta_0, 0) (\hat{k}_1 + \hat{k}_2), \quad (61)$$

onde θ_0 é o ângulo entre os eixos óticos e a direção z. Projetando a eq. (61) sobre

O eixo z é lambdado que $n(\omega, \theta_0, 0) = n_y(\omega)$, temos

$$2n_x(2\omega) = 2 \cos \theta_0 n_y(\omega).$$

O casamento de fase é então satisfeito se

$$n_x(2\omega) = \cos \theta_0 n_y(\omega). \quad (62)$$

Este tipo de casamento de fase pode ser utilizado para gerar emaranhamentos quânticos em polarizações dos fótons gerados por conversão paramétrica descendente. Cada fóton do par de fótons gêmeos é emitido ao longo de um dos eixos óticos, 1 ou 2. Assim, duas possibilidades surgem:

- i-) POL. A - EIXO 1 E POL. B - EIXO 2
- ii-) POL. B - EIXO 1 E POL. A - EIXO 2,

O par de fótons é então descrito pelo estado emaranhado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|HV\rangle + |VH\rangle),$$

que não pode ser fatorado no produto tensorial de estados de um único fóton.

Outra estratégia para gerar-se emaranhamento, envolve a utilização de dois cristais cortados p/ casam. de fase TIPO I, rotados de 90° , um el. rel. ao outro, e esta-

dos. Neste caso, a montagem é tal que um cristal deve ser bombeado c/pol. horizontal, gerando pares de fótons c/pol. vertical, e o outro deve ser bombeado c/pol. vertical, gerando pares de fótons c/pol. horizontal. Ao bombearmos os cristais a 45° geramos uma superposição entre as duas possibilidades que, no regime quântico (fóton a fóton), é descrita pelo estado:

$$| \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| HH \rangle + | VV \rangle) .$$

- Soluções das Equações Dinâmicas em um meio não-linear.

Nesta seção apresentaremos algumas soluções das equações dinâmicas (52) sem nos preocuparmos com as deduções destas soluções, que podem ser encontradas em Nonlinear Optics (Robert W. Boyd - Academic Press).

A solução exata das eqs. (52) aparece em termos das funções elípticas de Jacobi. Contudo, teremos soluções mais simples ~~para~~ admitindo algumas hipóteses simplificadoras que se aplicam a certos um dos processos já estudados aqui.

11

- Geração de Soma de frequências.

Neste caso, suporemos que o campo de freq. ω_2 é muito intenso, de modo que sua intensidade é pouco afetada pela geração do campo de freq. ω_3 , a partir da interação com um campo de freq. ω_1 , bem mais fraco. Ou seja,

$$A_2(z) \gg A_1(z) \text{ e } A_3(z) \Rightarrow A_2(z) \approx \text{cte.} \quad (63)$$

Portanto, as eqs. (52) tornam-se

$$\frac{dA_1}{dz} = K_1 A_3 e^{-i\Delta k z} \quad (64A)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = K_3 A_1 e^{i\Delta k z} \quad (64B)$$

onde

$$K_1 = i \frac{\chi \omega_1}{2n_1 c} A_2^* \quad (65A)$$

$$K_3 = i \frac{\chi \omega_3}{2n_3 c} A_2 \quad (65B)$$

As soluções gerais das eqs. (64) são (Ver livro de Boyd)

$$A_1(z) = \left[A_1(0) \cos qz + \left(\frac{K_1 A_3(0)}{g} + \frac{i \Delta K A_1(0)}{2g} \right) \sin qz \right] e^{-\frac{i \Delta K z}{2}} \quad (66A)$$

$$A_3(z) = \left[A_3(0) \cos qz + \left(\frac{-i \Delta K A_3(0)}{2g} + \frac{K_3 A_1(0)}{g} \right) \sin qz \right] e^{\frac{i \Delta K z}{2}}, \quad (66B)$$

onde $g = \sqrt{\kappa^2 + \frac{\Delta K^2}{4}}$ e $\kappa^2 = -K_1 K_3$.

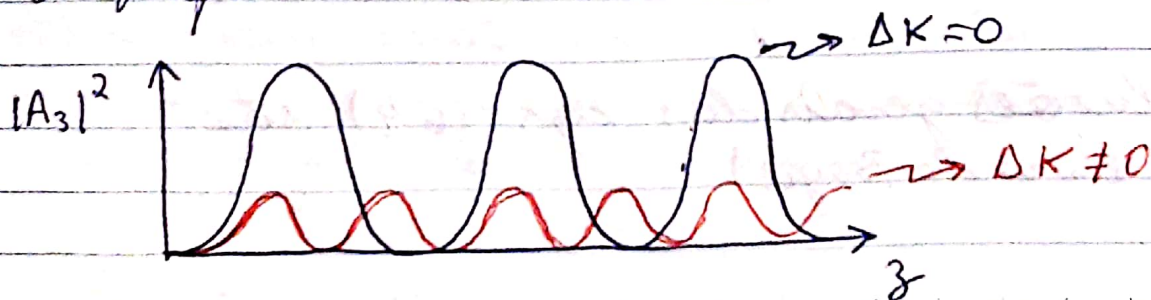
No caso particular em que $A_3(0) = 0$ obtemos:

$$A_3(z) = \frac{K_3}{g} A_1(0) \sin qz e^{\frac{i \Delta K z}{2}}$$

$$\Rightarrow |A_3(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \frac{|K_3|^2}{g^2} \sin^2 qz. \quad (67)$$

Portanto, quando $\Delta K \neq 0$, a intensidade do campo de freq. $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ gerado no cristal, diminui de um fator $\kappa^2 / (\kappa^2 + \Delta K^2 / 4)$.

Assim, fica claro o papel do acordo de fase na eficiência do processo de geração de soma de freqs.



- Geração de diferença de freqs.

Neste caso, suporemos que o campo de freq. ω_3 é muito intenso, de modo que sua intensidade é pouco afetada pelo processo paramétrico, ou seja,

$$A_3(z) \gg A_1(z) \text{ e } A_2(z) \Rightarrow A_3(z) \approx \text{cte.}$$

As eqs. (52) tornam-se

$$\frac{dA_1}{dz} = \kappa_1 A_2^* e^{-i\Delta K z} \quad (68A)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \kappa_2 A_1^* e^{-i\Delta K z}, \quad (68B)$$

onde

$$\Delta K = k_1 + k_2 - k_3,$$

$$\kappa_1 = i \frac{\chi \omega_1}{2n_1 c} A_3,$$

$$\kappa_2 = i \frac{\chi \omega_2}{2n_2 c} A_3.$$

As soluções gerais das eqs. (68) são:

$$A_1(z) = \left[A_1(0) \left(\cosh qz - \frac{i\Delta K}{2q} \sinh qz \right) + \frac{\kappa_1}{q} A_2^*(0) \sinh qz \right] e^{-\frac{i\Delta K z}{2}} \quad (69A)$$

$$A_2(z) = \left[A_2(0) \left(\cosh qz - \frac{i \Delta K \sinh qz}{2q} \right) + \frac{\kappa_2}{q} A_1^*(0) \sinh qz \right] e^{-i \Delta K z} \quad (69B)$$

onde q é dado por:

$$q = \left[\kappa_1 \kappa_2^* - \frac{\Delta K^2}{4} \right]^{1/2}$$

No caso particular em que $A_2(0) = 0$ ^{termos $\Delta K = 0$}

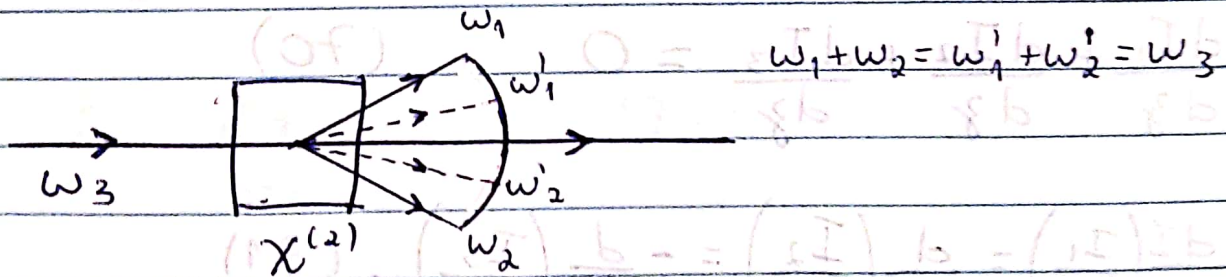
$$A_1(z) = A_1(0) \cosh \kappa z$$

$$A_2(z) = i \left(\frac{\nu_1 \omega_2}{\nu_2 \omega_1} \right)^{1/2} \frac{A_3}{|A_3|} A_1^*(0) \sinh \kappa z$$

onde $\kappa = \sqrt{\kappa_1 \kappa_2^*} = q (\Delta K = 0)$.

Enquanto na soma de freqs. obtivemos soluções oscilatórias, na diferença de freqs. as soluções crescem monotonicamente quando $\kappa z \gg 1$. A princípio, isto pode dar a impressão de que os campos A_1 e A_2 divergem p/ $z \rightarrow \infty$. Contudo, a medida que estes campos crescem, a aproximação de que A_3 é muito mais intenso deixa de valer, de modo que as soluções (69A e B) também não valem mais. De fato, já mencionamos que as soluções exatas são as funções elípticas de Jacobi, as quais são periódicas.

Um aspecto importante das soluções (69) permanece válido na sol. exata. Se tivermos $A_1(0) = A_2(0) = 0$, então $A_1(z) = A_2(z) = 0$, ou seja, sem a injeção de pelo menos um dos campos A_1 e A_2 não há geração de diferença de frequência. Contudo, o fenômeno de fluorescência paramétrica, no qual o cristal não-linear emite um largo espectro de freqs. menores ao ser iluminado com um laser de freq. maior, foi demonstrado experimentalmente. A ~~expli~~ descrição teórica para este fenômeno requer a quantização do campo eletromagnético, a ser vista mais adiante neste curso.



— Relações de Manley-Rowe

A intensidade ~~de~~ dos campos interagentes no cristal não-linear é dada por

$$I_j = \frac{1}{2} n_j c \epsilon_0 |A_j|^2,$$

de modo que

$$\frac{dI_j}{dz} = \frac{n_j c \epsilon_0}{2} \left(A_j^* \frac{dA_j}{dz} + A_j \frac{dA_j^*}{dz} \right).$$

A partir das eqs. (52), podemos demonstrar as seguintes relações, conhecidas como relações de Manley-Rowe:

$$\frac{dI_1}{dz} + \frac{dI_2}{dz} + \frac{dI_3}{dz} = 0 \quad (70)$$

$$\frac{dI}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} \right) = \frac{dI}{dz} \left(\frac{I_2}{\omega_2} \right) = - \frac{dI}{dz} \left(\frac{I_3}{\omega_3} \right). \quad (71)$$

A primeira relação, eq. (70), garante que a energia total dos três campos permanece constante durante a interação. Lembrando que $\hbar\omega$ é a energia de um fóton de freq. ω , $I_j/\hbar\omega_j$ é a intensidade expressa em fótons por unidade de tempo, por unidade de área. Assim, a relação dada pela eq. (71) ~~significa~~ significa que a taxa de geração

de fótons de freq. ω_1 , é igual à taxa de geração de fótons de freq. ω_2 , que é igual à taxa com que são destruídos os fótons de freq. ω_3 . A eq. (71) pode ainda ser escrita na forma:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_2}{\omega_2} + \frac{I_3}{\omega_3} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} + \frac{I_3}{\omega_3} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} - \frac{I_2}{\omega_2} \right). \quad (72)$$

Obtemos, assim, as quantidades conservadas na interação entre os três campos:

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad (73)$$

$$M_1 = \frac{I_2}{\omega_2} + \frac{I_3}{\omega_3}, \quad (74)$$

$$M_2 = \frac{I_1}{\omega_1} + \frac{I_3}{\omega_3}, \quad (75)$$

$$M_3 = \frac{I_1}{\omega_1} - \frac{I_2}{\omega_2}. \quad (76)$$

Note, porém, que as eqs. (52), bem como as relações acima, são válidas para um meio sem perdas.

- Equações dinâmicas em um meio com perdas.

As perdas por absorção podem ser incluídas supondo que a susceptibilidade elétrica de 1ª ordem possui uma parte imaginária:

$$\chi^{(1)}(\omega) = \chi_R^{(1)}(\omega) + i \chi_I^{(1)}(\omega) \quad (73)$$

e/ou supondo que a condutividade elétrica do meio seja $\sigma \neq 0$. A anisotropia em $\chi_I^{(1)}$ e a condutividade σ de dipolos e ondas geradas superficialmente são isotrópicas na 2ª igualdade. Assim, substituindo (73) nas eqs. (38) obtemos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_j) = \frac{\omega_j^2}{c^2} \left[\chi_R^{(1)}(\omega_j) \vec{E}_j + \left[1 + \chi_I^{(1)}(\omega_j) \right] \vec{E}_j + \frac{1}{\epsilon_0} P^{(2)}(\omega_j) \right] + i \mu_0 \sigma(\omega_j) \omega_j \vec{E}_j \quad (74)$$

Por sua vez, a eq. (48) deve ser modificada, assim como as eqs. (49) e (50), de modo que:

$$-2i \cos^2 \theta_{w_1} \partial_{k_1} A_1 = i \chi_I^{(1)}(\omega_1) \frac{\omega_1}{n_1 c} A_1 + \frac{\omega_1 k}{n_1 c} A_3 A_2^* \vec{E}^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} + i \sigma_1 \mu_0 \frac{c}{n_1} A_1 \quad (75)$$

~~As equações de onda para as ondas de superfície são:~~

$$-2i \cos^2 \theta_{w_2} \partial_{k_2} A_2 = i \chi_{\pm}(\omega_2) \frac{\omega_2}{n_2 c} A_2 + \frac{\omega_2 \chi}{n_2 c} A_3 A_1^* e^{i \Delta \vec{k} \cdot \vec{r}} + i \sigma_2 \frac{\mu_0 c}{n_2} A_2 \quad (76)$$

$$-2i \cos^2 \theta_{w_3} \partial_{k_3} A_3 = i \chi_{\pm}(\omega_3) \frac{\omega_3}{n_3 c} A_3 + \frac{\omega_3 \chi}{n_3 c} A_1 A_2 e^{i \Delta \vec{k} \cdot \vec{r}} + i \sigma_3 \frac{\mu_0 c}{n_3} A_3 \quad (77)$$

Finalmente, supondo $\cos \theta_w \sim 1$, definindo

$$\gamma_j = \frac{\chi_{\pm}(\omega_j) \omega_j}{2 n_j c} + \frac{\sigma_j \mu_0 c}{2 n_j} = \frac{\chi_{\pm} \omega_j}{2 n_j c} + \frac{\mu_0 \sigma_j}{2 n_j}$$

e tomando o caso colinear, obtemos a nova versão das eqs. (52) com a inclusão das perdas:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -\gamma_1 A_1 + i \frac{\chi \omega_1}{2 n_1 c} A_3 A_2^* e^{-i \Delta k z} \quad (78A)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = -\gamma_2 A_2 + i \frac{\chi \omega_2}{2 n_2 c} A_3 A_1^* e^{-i \Delta k z} \quad (78B)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = -\gamma_3 A_3 + i \frac{\chi \omega_3}{2 n_3 c} A_1 A_2 e^{i \Delta k z} \quad (78C)$$

Com as eqs. (78) concluímos nossa introdução à Ótica Não-Linear com os ingredientes necessários à compreensão do funcionamento de um oscilador paramétrico óptico.