e por

$$d_{ef} = d_{22} \cos^2\theta \cos 3\phi \qquad (32)$$

sob condições (TIPO II) tais que as polarizações são ortogonais. Nestas expressões, θ e ϕ são, respectivamente, as coords. zenital e azimutal do vetor de onda, com o eixo ótico colocado sobre a direção z.

— Equação de onda em um meio não-linear:

Retomando a eq. (6) ~~do~~ cap. I na ausência de correntes temos:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}. \qquad (33)$$

Para incluirmos os efeitos não-lineares na propagação do campo, faremos a decomposição:

$$\vec{P} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL}, \qquad (34)$$

onde $\vec{P}_L$ é a parte linear da polarização e $\vec{P}_{NL}$ é a parte não linear. Frequentemente, a dedução da eq. de onda feita na literatura usa a relação

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}, \qquad (35)$$

e o fato de que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$. Contudo, comentamos que os efeitos de $\chi^{(2)}$ só podem ocorrer em meios anisotrópicos, para os quais vimos no cap. I que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\neq 0$. De fato, em um meio anisotrópico, a comp. linear da pol. não é // ao campo elétrico $\vec{E}$. Assim sendo, vamos proceder de outra forma.

Vamos começar ~~[illegible]~~ supondo que o meio não-linear é iluminado por dois campos de frequências ω_1 e ω_2, gerando um 3º campo de freq. $\omega_3=\omega_1+\omega_2$ por um processo de mistura de ondas causado por $\chi^{(2)}$. Neste caso, podemos supor que

$$\vec{E}_{TOT} = \vec{E}(\omega_1)+\vec{E}(\omega_2)+\vec{E}(\omega_3) \text{ e} \qquad (36)$$

$$\vec{P}^{(2)}_{TOT} = \vec{P}^{(2)}(\omega_1+\omega_2) + \vec{P}^{(2)}(\omega_3-\omega_1) + \vec{P}^{(2)}(\omega_3-\omega_2).$$

Os campos interagentes são da forma

$$\vec{E}(\omega_i) = \vec{E}_i(\vec{r})\, e^{-i\omega_i t} \qquad (37)$$

Ao substituirmos (36) em (33) devemos considerar que esta última deve ser satisfeita independentemente para cada frequência. Neste caso, teremos para cada uma das freqs. envolvidas:

/ /

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}_1) - \frac{\omega_1^2}{c^2}\vec{E}_1 = +\mu_0\,\omega_1^2\left[\overset{\varepsilon_0}{\chi^{(1)}}\vec{E}_1 + \vec{P}^{(2)}_{(\omega_1=\omega_3-\omega_2)}\right]$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}_2) - \frac{\omega_2^2}{c^2}\vec{E}_2 = +\mu_0\,\omega_2^2\left[\underset{\varepsilon_0}{\chi^{(1)}}\vec{E}_2 + \vec{P}^{(2)}(\omega_2=\omega_3-\omega_1)\right]$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}_3) - \frac{\omega_3^2}{c^2}\vec{E}_3 = +\mu_0\,\omega_3^2\left[\underset{\varepsilon_0}{\chi^{(1)}}\vec{E}_3 + \vec{P}^{(2)}(\omega_3=\omega_1+\omega_2)\right]$$

(38)

As eqs. (38) nos dizem que os campos de freqs. ω_1, ω_2 e ω_3 se propagam pelo meio não-linear sob a influência uns dos outros através das contribuições da polarização não linear. Para resolvermos estas eqs. suporemos que os três campos envolvidos são da forma

$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = A_i(\vec{r})\,\vec{\varphi}_i(\vec{r},t), \qquad (39)$$

onde $\vec{k}_i$ dá as direções de propagação dos campos e $\vec{\varphi}_i(\vec{r},t)$ são ondas planas de amplitude unitária:

$$\vec{\varphi}_i(\vec{r},t) = \hat{e}_i\, e^{i(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega_i t)}. \qquad (40)$$

Os unitários $\hat{e}_i$ dão as direções de polarização de cada feixe. Assim, resta substituirmos (39) e (40) em (38). Uma vez que os três campos interagentes devem evoluir trocando energia ao longo do meio não-linear, as amplitudes A_1, A_2 e A_3 dependem de $\vec{r}$. Nosso principal objetivo é determinar a evolução destas amplitudes.

Vamos inicialmente desenvolver o termo $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times[A(\vec{r})\,\vec{\varphi}\,] = A(\vec{r})\,\vec{\nabla}\times\vec{\varphi} + \vec{\nabla}A\times\vec{\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = A(\vec{r})\,\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\varphi}) + \vec{\nabla}A\times(\vec{\nabla}\times\vec{\varphi}) + \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}A\times\vec{\varphi})$$

Mas,

$$\vec{\nabla}\times\vec{\varphi} = i\vec{k}\times\vec{\varphi} \quad , \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\varphi}) = -\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{\varphi})$$

$$\vec{\nabla}A\times(\vec{\nabla}\times\vec{\varphi}) = i\,\vec{\nabla}A\times(\vec{k}\times\vec{\varphi}) = i\left[(\vec{\nabla}A\cdot\vec{\varphi})\vec{k} - (\vec{\nabla}A\cdot\vec{k})\vec{\varphi}\right]$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}A\times\vec{\varphi}) = (\vec{\varphi}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}A + (\vec{\nabla}A\cdot\vec{\nabla})\vec{\varphi} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi})\vec{\nabla}A - (\nabla^2 A)\vec{\varphi}$$

$$(\vec{\nabla}A\cdot\vec{\nabla})\vec{\varphi} = i\,(\vec{k}\cdot\vec{\nabla}A)\,\vec{\varphi} \quad e \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi} = i\vec{k}\cdot\vec{\varphi}$$

Por enquanto, iremos supor que $A(\vec{r})$ varia apenas ao longo de $\vec{k}$ (*) e que esta variação seja lenta o suficiente, isto é, que $A(\vec{r})$ varia pouco sobre um comprimento de onda λ, de modo que:

$$\partial_k^2 A \ll k\,\partial_k A \qquad (41)$$

(*) $(\partial_\perp A = 0)$

o que nos leva a

$$(\vec{\varphi}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}A \text{ e } \nabla^2 A \ll (\vec{K}\cdot\vec{\nabla}A)\vec{\varphi} \text{ e } (\vec{K}\cdot\vec{\varphi})\vec{\nabla}A \quad (42)$$

Neste caso,

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}A\times\vec{\varphi}) \simeq i\left[(\vec{K}\cdot\vec{\varphi})\vec{\nabla}A - (\vec{K}\cdot\vec{\nabla}A)\vec{\varphi}\right] \quad (43)$$

Observação: Se quisermos estudar efeitos espaciais como difração, focalização e defocalização, etc..., temos que manter as derivadas transversais de A. Isto será fundamental para descrevermos, por exemplo, processos de transferência de imagens entre os campos interagentes.

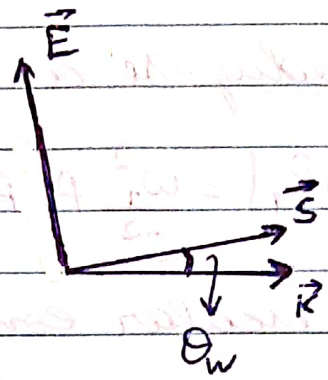
Finalmente, das considerações acima, chegamos a:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) \simeq -A(\vec{r})\,\vec{K}\times(\vec{K}\times\vec{\varphi}) - 2i(\vec{K}\cdot\vec{\nabla}A)\vec{\varphi} + i(\vec{K}\cdot\vec{\varphi})\vec{\nabla}A + i(\vec{\nabla}A\cdot\vec{\varphi})\vec{K} \quad (44)$$

Vamos discutir os dois últimos termos de (43). Como, por hipótese, $A(\vec{r})$ varia apenas ao longo de $\vec{K}$, temos que $\vec{\nabla}A = \partial_K A\,\hat{K}$ e

$$i\left[(\vec{K}\cdot\vec{\varphi})\vec{\nabla}A + (\vec{\nabla}A\cdot\vec{\varphi})\vec{K}\right] = 2iK\partial_K A(\hat{K}\cdot\vec{\varphi})\hat{K} = 2iK\partial_K A\, e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)}(\hat{K}\cdot\hat{e})\hat{K} \quad (45)$$

Em meios isotrópicos $\vec{k} \perp \vec{E}$ e, portanto, $\vec{k} \cdot \vec{\varphi} = 0$. Em um meio anisotrópico uniaxial, a onda ordinária também possui $\vec{k} \perp \vec{E}$. Contudo, para a onda extraordinária temos a seguinte geometria:



onde θ_W é o ângulo de walk-off dado pela eq. (28) do cap. I. Portanto, é fácil ver que:

$$\hat{k} \cdot \hat{e} = \cos(\theta_W + \pi/2) = -\operatorname{sen}\theta_W. \quad (46)$$

Diante das conclusões acima, podemos reescrever a 1ª das eqs. (38) de modo que:

(OBS: $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$)

$$-A_1(\vec{r}) \left[\vec{k}_1 \times (\vec{k}_1 \times \vec{\varphi}_1) + \frac{\omega_1^2}{c^2} \underbrace{\left(\mathbb{1} + \chi^{(1)}_{(\omega_1)} \right)}_{\overleftrightarrow{\varepsilon}/\varepsilon_0} \vec{\varphi}_1 \right] - \quad (47)$$

$$2 i k_1 \partial_{k_1} A_1 \left[\vec{\varphi}_1 - (\hat{k}_1 \cdot \vec{\varphi}_1) \hat{k}_1 \right] = \frac{\omega_1^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} P^{(2)}(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2)$$

O 1º termo entre colchetes se anula qdo. $\vec{\varphi}_1$ for uma solução da eq. (7B) do cap. I. Assim, os principais efeitos da anisotropia do cristal

/ /

recaem sobre o termo de onda plana $\vec{\varphi}$. Além disso, a polarização não-linear de freq. ω_1 é dada por:

$$P^{(2)}(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2) = \varepsilon_0 \chi^{(2)} \vec{E}_3 \vec{E}_2^* = \varepsilon_0 A_3 A_2^* \chi^{(2)} \vec{\varphi}_3 \vec{\varphi}_2^*$$

Assim a eq. (47) reduz-se a

$$-2iK_1 \partial_{K_1} A_1 \left[\vec{\varphi}_1 - (\hat{K}_1 \cdot \vec{\varphi}_1)\hat{K}_1\right] = \frac{\omega_1^2}{c^2} A_3 A_2^* \chi^{(2)} \vec{\varphi}_3 \vec{\varphi}_2^*$$

Fazendo o produto escalar com $\vec{\varphi}_1^*$ obtemos

$$-2iK_1 \cos^2\theta_{W1} \, \partial_{K1} A_1 = \frac{\omega_1^2}{c^2} A_3 A_2^* e^{i(\vec{K}_3 - \vec{K}_2 - \vec{K}_1)\cdot\vec{r}} \times \left[\chi^{(2)}_{ijk} e_{1i} e_{2j} e_{3k}\right]$$

Definindo $\Delta\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 - \vec{K}_3$, fazendo $K_1 = n_1\omega_1/c$, onde n_1 é o índice de refração correspondente à freq. e polarização de $\vec{E}(\omega_1)$, e $\chi = \chi^{(2)}_{ijk} e_{1i} e_{2j} e_{3k}$, obtemos:

$$-2i \cos^2\theta_{W1} \, \partial_{K1} A_1 = \frac{\omega_1 \chi}{n_1 c} A_3 A_2^* e^{-i\Delta\vec{K}\cdot\vec{r}} \qquad (48)$$

O mesmo procedimento fornece para os campos $\vec{E}(\omega_2)$ e $\vec{E}(\omega_3)$ as seguintes eqs:

$$-2i\cos^2\theta_{W2}\,\partial_{K2}A_2 = \frac{\omega_2\chi}{n_2 c}A_3A_1^* e^{-i\Delta\vec{K}\cdot\vec{r}} \quad (49)$$

e

$$-2i\cos^2\theta_{W3}\,\partial_{K3}A_3 = \frac{\omega_3\chi}{n_3 c}A_1A_2\, e^{i\Delta\vec{K}\cdot\vec{r}} \quad (50)$$

Nas eqs. (48)-(50) usamos implicitamente a propriedade de simetria completa, de modo que:

$$\chi_{ijk}e_{1i}e_{2j}e_{3k} = \chi_{ijk}e_{2i}e_{3j}e_{1k} = \chi_{ijk}e_{3i}e_{1j}e_{2k} = \chi \quad (51)$$

As eqs. (48)-(50), juntamente com suas respectivas complexo-conjugadas, governam a evolução dos campos interagentes no meio não-linear.

— Geometria colinear:

Suponhamos que os três vetores de onda $\vec{K}_1$, $\vec{K}_2$ e $\vec{K}_3$ sejam colineares e designemos por z a direção de propagação comum aos três campos. Suponhamos ainda que a geometria do sistema seja otimizada de forma a minimizar o walk-off, de modo que $\cos\theta_W \sim 1$ para os três campos envolvidos. Neste caso as eqs. (48)-(50) ficam