5^a LISTA DE ÓPTICA QUÂNTICA I

(2020-1)

1-) Sendo $X = a + a^\dagger$ e $Y = (a - a^\dagger)/i$, mostre que $\Delta X = \Delta Y = 1$ para um estado coerente $|\alpha\,\rangle$.

2-) Mostre que $a^\dagger$ não possui autovetor à direita.

3-) Considere o operador de compressão

$$S(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{\dagger\,2}\right] ,$$

onde $\xi = r\,e^{i\theta}$. Mostre as seguintes relações:

i-) $S^\dagger(\xi) a S(\xi) = a\,\cosh r - a^\dagger e^{i\theta} \sinh r$

ii-) $S^\dagger(\xi) a^\dagger S(\xi) = a^\dagger\,\cosh r - a\,e^{-i\theta} \sinh r$

iii-) $S^\dagger(\xi)[X(\theta) + iY(\theta)]S(\xi) = X(\theta)e^{-r} + iY(\theta)e^{r}$, onde

$$X(\theta) = a\,e^{-i\theta/2} + a^\dagger\,e^{i\theta/2}$$

$$Y(\theta) = \frac{a\,e^{-i\theta/2} - a^\dagger\,e^{i\theta/2}}{i}$$

4-) Considere o assim chamado "estado comprimido coerente" definido por $|\xi\,,\alpha\,\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\,\rangle$, onde $D(\alpha) = \exp\left[\alpha a^\dagger - \alpha^* a\right]$ é o operador deslocamento. Mostre que para $|\xi\,,\alpha\,\rangle$:

i-) $\langle X + iY\rangle = \langle X(\theta) + iY(\theta)\rangle e^{i\theta/2} = 2\,\alpha$

ii-) $\Delta X(\theta) = e^{-r}$ e $\Delta Y(\theta) = e^{r}$

iii-) $\langle N\rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r$

iv-) $(\Delta N)^2 = |\alpha \cosh r - \alpha^* e^{i\theta} \sinh r|^2 + 2\,\sinh^2 r\,\cosh^2 r$

5-) Obtenha as representações de Wigner e Husimi para o estado de Fock $|1\rangle$ e para o estado térmico.

6-) Considere dois modos do campo associados aos operadores de aniquilação a_1 e a_2. Definimos as quadraturas destes modos como $X_j = a_j + a_j^\dagger$ e $Y_j = (a_j - a_j^\dagger)/i$ $(j = 1, 2)$. O operador de compressão a dois modos é definido como:

$$S_{ab}(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}\xi^* a_1 a_2 - \frac{1}{2}\xi a_1^\dagger a_2^\dagger\right] ,$$

onde $\xi = r\, e^{i\theta}$. A partir deste operador, podemos definir o estado de vácuo comprimido a dois modos como: $S_{ab}(\xi)|vac\rangle$.

Supondo $\theta = 0$, calcule $(\Delta X_-)^2 + (\Delta Y_+)^2$ e $(\Delta X_+)^2 + (\Delta Y_-)^2$ para o estado de vácuo comprimido, onde $X_\pm = X_1 \pm X_2$ e $Y_\pm = Y_1 \pm Y_2$. A condição de emaranhamento em variáveis contínuas é $(\Delta X_-)^2 + (\Delta Y_+)^2 < 4$ ou $(\Delta X_+)^2 + (\Delta Y_-)^2 < 4$. O estado comprimido a dois modos é emaranhado?

7-) O número total de fótons de um campo multimodo é dado por:

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hat{n}_{\mathbf{k},\sigma} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} a_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k},\sigma} \; .$$

Calcule $\langle \hat{N} \rangle$ e $\langle \Delta \hat{N}^2 \rangle$ para um campo multimodo, em equilíbrio térmico à temperatura T.