4^a LISTA DE ÓPTICA QUÂNTICA I

(2020-1)

1-) A expansão em ondas planas do potencial vetor para o campo eletromagnético quantizado é:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k},s} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}\epsilon_0} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}s}\, \hat{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + h.c. \right] .$$

a-) Obtenha as expressões para os campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$.

b-) A partir da expressão simetrizada para o momento linear total no interior da caixa de quantização:

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{L^3} d^3\mathbf{r} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \right] ,$$

mostre que

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\, \mathbf{k}\, a^\dagger_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s} .$$

c-) A partir da expressão simetrizada para o momento angular de spin no interior da caixa de quantização:

$$\mathbf{J}_s = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{L^3} d^3\mathbf{r} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \right] ,$$

mostre que

$$\mathbf{J}_s = i\,\hbar \sum_{\mathbf{k},s,s'} \left(a^\dagger_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s'} + \frac{1}{2}\delta_{ss'} \right) \hat{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} \times \hat{\varepsilon}^*_{\mathbf{k}s'} ,$$

e obtenha as expressões de $\mathbf{J}_s$ nas bases de polarização linear e circular.

2-) Considere a distribuição de Poisson:

$$p(n) = e^{-x} \frac{x^n}{n!}$$

a-) Mostre que $p(n)$ é normalizada.

b-) Mostre que $\langle n \rangle = x$.

c-) Mostre que $\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle = x$.

3-) Mostre que o operador deslocamento

$$D(v) = e^{v\, a^\dagger - v^* a}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

a-) $D^\dagger(v)\, a\, D(v) = a + v \quad \text{e} \quad D^\dagger(v)\, a^\dagger\, D(v) = a^\dagger + v^*.$

b-) $D^\dagger(v)\, a^n\, D(v) = (a + v)^n \quad \text{e} \quad D^\dagger(v)\, (a^\dagger)^n\, D(v) = (a^\dagger + v^*)^n.$

c-) $D(v)D(v') = e^{(vv'^* - v^* v')/2} D(v + v').$

d-) $Tr[D(v)D^\dagger(v')] = \pi\delta^2(v - v').$