segundo a qual o elétron deve ser encontrado em *algum ponto* do interior do poço, já que a probabilidade 1 significa certeza.

De acordo com a Eq. 39-4 a menor energia permitida para o elétron não é zero, mas a energia correspondente a $n = 1$. Essa energia mínima é chamada de **energia de ponto zero** do sistema.

Um Elétron em um Poço de Potencial Finito Em um poço de potencial finito existe uma diferença de potencial finita, U_0, entre a energia potencial do lado de fora do poço e energia potencial no interior. A função de onda de um elétron confinado em um poço desse tipo é diferente de zero em pontos fora do poço; isso significa que existe uma probabilidade finita de que o elétron consiga escapar do poço.

Armadilhas Eletrônicas Bidimensionais e Tridimensionais As energias quantizadas de um elétron confinado em um poço de potencial infinito bidimensional de forma retangular e dimensões L_x e L_y são dadas por

$$E_{nx,ny} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right), \qquad (39\text{-}20)$$

onde n_x é o número quântico associado ao eixo x e n_y é o número quântico associado ao eixo y. Analogamente, as energias de um elétron confinado em um poço de potencial infinito tridimensional na forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões L_x, L_y e L_z são dadas por

$$E_{nx,ny,nz} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right), \qquad (39\text{-}21)$$

onde n_z é um terceiro número quântico associado ao eixo z.

O Átomo de Hidrogênio Tanto o modelo (incorreto) de Bohr para o átomo de hidrogênio como a aplicação (correta) da equação de Schrödinger ao mesmo átomo mostram que os níveis de energia quantizados do átomo de hidrogênio são dados por

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13{,}60\ \text{eV}}{n^2}, \qquad (39\text{-}32, 39\text{-}33)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

De acordo com essa equação, se o átomo sofre uma transição entre dois níveis de energia devido à emissão ou absorção de um fóton de luz, o comprimento de onda da luz é dado por

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_{\text{baixo}}^2} - \frac{1}{n_{\text{alto}}^2}\right), \qquad (39\text{-}36)$$

onde

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1{,}097\,373 \times 10^7\ \text{m}^{-1} \qquad (39\text{-}37)$$

é a *constante de Rydberg*.

A **densidade de probabilidade radial** $P(r)$ para um estado do átomo de hidrogênio é definida de tal forma que $P(r)\,dr$ é a probabilidade de que o elétron seja detectado na região entre duas cascas concêntricas cujos raios são r e $r + dr$. No caso do estado fundamental do átomo de hidrogênio,

$$P(r) = \frac{4}{a^3} r^2 e^{-2r/a}, \qquad (39\text{-}44)$$

onde a, o **raio de Bohr**, é uma unidade de comprimento cujo valor é 52,9 pm. A Fig. 39-20 mostra o gráfico de $P(r)$ em função de r para o estado fundamental.

As Figs. 39-22 e 39-24 mostram as densidades de probabilidade (e não as densidades de probabilidade *radial*) para os quatro estados do átomo de hidrogênio com $n = 2$. O gráfico da Fig. 39-22 ($n = 2$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$) tem simetria esférica. Os gráficos da Fig. 39-24 ($n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = 0, +1, -1$) são simétricos em relação ao eixo z, mas quando combinados também apresentam simetria esférica.

Os quatro estados com $n = 2$ têm a mesma energia e podem ser imaginados como formando uma **camada**, a camada $n = 2$. Os três estados da Fig. 39-24 têm o mesmo valor de ℓ e podem ser imaginados como formando uma **subcamada**, a subcamada $n = 2$, $\ell = 1$. Não é possível distinguir experimentalmente os quatro estados da camada $n = 2$, a menos que o átomo de hidrogênio seja submetido a um campo elétrico ou magnético externo que estabeleça um eixo de simetria.

PERGUNTAS

1 Um elétron confinado em um poço de potencial infinito unidimensional se encontra no estado $n = 17$. Quantos pontos (a) de probabilidade zero e (b) de probabilidade máxima possui a onda de matéria associada ao elétron?

2 A Fig. 39-26 mostra três poços de potencial infinitos unidimensionais. Sem executar nenhum cálculo, determine as funções de onda ψ associadas a um elétron no estado fundamental de cada poço.

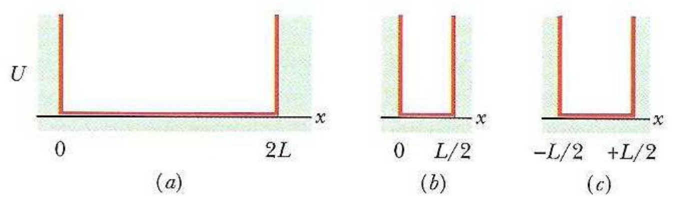

FIG. 39-26 Pergunta 2.

3 Três elétrons são aprisionados em três diferentes poços de potencial infinitos unidimensionais de largura (a) 50 pm; (b) 200 pm; (c) 100 pm. Coloque os elétrons na ordem das energias dos estados fundamentais, começando pela maior.

4 Quando multiplicamos por 2 a largura de um poço de potencial infinito unidimensional, (a) a energia do estado fundamental do elétron confinado é multiplicada por 4, 2, 1/2, 1/4 ou outro número? (b) As energias dos outros estados são multiplicadas por este número ou por algum outro, que depende do número quântico?

5 Se o leitor quisesse usar a armadilha idealizada da Fig. 39-1 para capturar um pósitron, teria que mudar (a) a geometria da armadilha; (b) o potencial elétrico do cilindro do meio; (c) os potenciais elétricos dos cilindros das extremidades? (O pósitron é uma partícula de carga positiva com a mesma massa que o elétron.)

6 Um elétron está confinado em um poço de potencial finito suficientemente profundo para que o elétron ocupe um estado com $n = 4$. Quantos pontos (a) de probabilidade zero; (b) de probabilidade máxima possui a onda de matéria associada ao elétron?

7 Um próton e um elétron são confinados em poços de potencial infinitos unidimensionais iguais; as duas partículas se encontram no estado fundamental. No centro dos poços a densidade de probabilidade para o próton é maior, menor ou igual à densidade de probabilidade para o elétron?

8 A energia de um próton confinado em um poço de potencial infinito unidimensional no estado fundamental é maior, menor ou igual à de um elétron confinado no mesmo poço de potencial?

9 A tabela a seguir mostra os números quânticos de cinco estados do átomo de hidrogênio. Quais desses estados são impossíveis?

TABELA 39-4

	n	ℓ	m_ℓ
(a)	3	2	0
(b)	2	3	1
(c)	4	3	−4
(d)	5	5	0
(e)	5	3	−2

10 O leitor está interessado em modificar o poço de potencial finito cujo diagrama de níveis de energia aparece na Fig. 39-7, de modo a permitir que o elétron confinado possa ocupar mais de quatro estados quânticos. Para isso é preciso (a) fazer o poço mais largo ou mais estreito? (b) Fazer o poço mais profundo ou mais raso?

11 Sem fazer nenhum cálculo, coloque os estados quânticos do elétron representados na Fig. 39-8 (definidos pelo valor de n) na ordem dos comprimentos de onda de de Broglie correspondentes, começando pelo maior.

12 Um elétron, confinado em um poço de potencial finito como o da Fig. 39-7, se encontra no estado de menor energia possível. (a) Seu comprimento de onda de de Broglie, (b) seu módulo do momento e (c) sua energia seriam maiores, menores ou iguais se o poço de potencial fosse infinito, como o da Fig. 39-2?

13 Um elétron que está confinado em um poço de potencial infinito unidimensional de largura L é excitado do estado fundamental para o primeiro estado excitado. Essa excitação aumenta, diminui ou não tem nenhum efeito sobre a probabilidade de detectar o elétron em uma pequena região (a) no centro do poço; (b) perto de uma das bordas do poço?

14 A Fig. 39-27 mostra os primeiros níveis de energia (em elétrons-volts) para cinco situações em que o elétron está confinado em um poço de potencial infinito unidimensional. Nos poços B, C, D e E o elétron se encontra no estado fundamental. O elétron do poço A está no quarto estado excitado (25 eV). O elétron pode voltar ao estado fundamental emitindo um ou mais fótons. Que energias de *emissão* associadas a esse processo de decaimento coincidem com energias de *absorção* (a partir do estado fundamental) dos outros quatro elétrons? Especifique os números quânticos correspondentes.

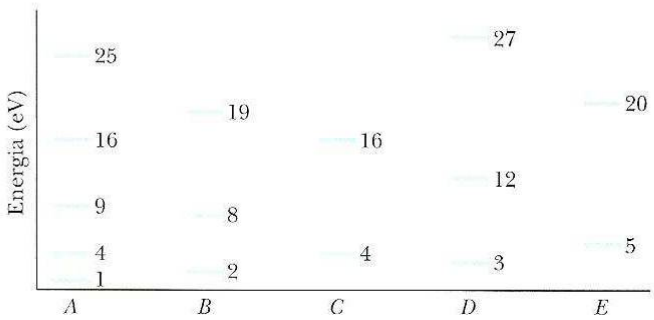

FIG. 39-27 Pergunta 14.

15 Um átomo de hidrogênio se encontra no terceiro estado excitado. Para que estado (especifique o número quântico n) o átomo teria que passar (a) para emitir um fóton com o maior comprimento de onda possível; (b) para emitir um fóton com o menor comprimento de onda possível; (c) para absorver um fóton com o maior comprimento de onda possível?

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 39-3 Energia de um Elétron Confinado

•1 A energia do estado fundamental de um elétron confinado em um poço de potencial infinito unidimensional é 2,6 eV. Qual será a energia do estado fundamental se a largura do poço for multiplicada por dois?

•2 Um elétron, confinado em um poço de potencial infinito unidimensional com 250 pm de largura, se encontra no estado fundamental. Qual é a energia necessária para transferi-lo para o estado $n = 4$?

•3 Qual deve ser a largura de um poço de potencial infinito unidimensional para que um elétron no estado $n = 3$ tenha uma energia de 4,7 eV?

•4 Um próton é confinado em um poço de potencial infinito unidimensional com 100 pm de largura. Qual é a energia do estado fundamental?

•5 Considere o núcleo atômico como equivalente a um poço de potencial infinito unidimensional de largura $L = 1{,}4 \times 10^{-14}$ m, um diâmetro nuclear típico. Qual seria a energia do estado fundamental de um elétron confinado a um núcleo atômico? (*Observação:* Os núcleos atômicos não contêm elétrons.)

•6 Determine a energia do estado fundamental (a) de um elétron e (b) de um próton confinado em um poço de potencial infinito unidimensional com 200 pm de largura.

•7 Um elétron no estado fundamental de um poço de potencial unidimensional infinito de largura L tem uma energia E_1. Quando a largura do poço muda para L', a energia do elétron diminui para $E_1' = 0{,}500E_1$. Qual é o valor da razão L'/L?

••8 Um elétron está confinado em um poço de potencial infinito unidimensional. Determine o valor (a) do número quântico maior e (b) do número quântico menor tais que a diferença de energia correspondente seja igual à diferença de energia ΔE_{43} entre os níveis $n = 4$ e $n = 3$. (c) Mostre que não existe nenhum par de níveis de energia adjacentes com uma diferença de energia igual a $2\Delta E_{43}$.

••9 Um elétron está confinado em um poço de potencial infinito unidimensional. Determine o valor (a) do número quântico maior e (b) do número quântico menor tais que a diferença de energia correspondente seja igual à energia do nível $n = 5$. (c) Mostre que não existe um par de níveis adjacentes tais que a diferença de energia entre os níveis seja igual à energia do nível $n = 6$.

••10 Um elétron está confinado em um poço de potencial infinito unidimensional de 250 pm de largura e se encontra no estado fundamental. Determine (a) o maior, (b) o segundo maior e (c) o terceiro maior comprimento de onda que podem ser absorvidos pelo elétron de uma só vez.

••11 Um elétron confinado em um poço de potencial infinito unidimensional com 250 pm de largura é transferido do primeiro estado excitado para o terceiro estado excitado. (a) Que energia deve ser fornecida ao elétron para que execute esse salto quântico? Se o elétron em seguida decai para o estado fundamental emitindo fótons, o que pode ocorrer de várias formas, determine (b) o menor comprimento de onda, (c) o segundo menor, (d) o maior e (e) o segundo maior comprimento de onda que podem ser emitidos. (f) Mostre as várias formas possíveis de decaimento em um diagrama de níveis de energia. Se um fóton com um comprimento de onda de 29,4 nm é emitido, determine (g) o maior comprimento de onda e (h) o menor comprimento de onda que podem ser emitidos em seguida.

••12 Um elétron está confinado em um poço unidimensional infinito e se encontra no primeiro estado excitado. A Fig. 39-28 mostra os cinco maiores comprimentos de onda que o elétron pode absorver de uma única vez: $\lambda_a = 80{,}78$ nm, $\lambda_b = 33{,}66$ nm, $\lambda_c = 19{,}23$ nm, $\lambda_d = 12{,}62$ nm e $\lambda_e = 8{,}98$ nm. Qual é a largura do poço de potencial?

FIG. 39-28 Problema 12.

seção 39-4 Funções de Onda de um Elétron Aprisionado

••13 Um elétron está confinado em um poço de potencial infinito unidimensional com 100 pm de largura; o elétron se encontra no estado fundamental. Qual é a probabilidade de que o elétron seja detectado em uma região de largura $\Delta x = 5{,}0$ pm em torno do ponto (a) $x = 25$ pm; (b) $x = 50$ pm; (c) $x = 90$ pm? (*Sugestão:* A largura Δx da região é tão pequena que a densidade de probabilidade pode ser considerada constante em seu interior.)

••14 Uma partícula é confinada em um poço de potencial infinito unidimensional como o da Fig. 39-2. Se a partícula se encontra no estado fundamental, qual é a probabilidade de que seja detectada (a) entre $x = 0$ e $x = 0{,}25L$; (b) entre $x = 0{,}75L$ e $x = L$; (c) entre $x = 0{,}25L$ e $x = 0{,}75\,L$?

••15 Um poço unidimensional infinito de 200 pm de largura contém um elétron no terceiro estado excitado. Um detector de elétrons com 2,00 pm de largura é instalado com o centro em um ponto de máxima densidade de probabilidade. (a) Qual é a probabilidade de que o elétron seja detectado? (b) A cada 1000 vezes que realizarmos essa experiência, quantas vezes, em média, o elétron será detectado?

••16 Um elétron se encontra em um certo estado de energia de um poço unidimensional infinito que se estende de $x = 0$ até $x = L = 200$ pm. A densidade de probabilidade do elétron é zero em $x = 0{,}300L$ e $x = 0{,}400L$, e não é zero para nenhum valor intermediário de x. O elétron salta para o nível de energia imediatamente inferior, emitindo um fóton. Qual é a variação de energia do elétron?

seção 39-5 Um Elétron em um Poço Finito

•17 Um elétron no estado $n = 2$ do poço de potencial finito da Fig. 39-7 absorve uma energia de 400 eV de uma fonte externa. Use o diagrama de níveis de energia da Fig. 39-9 para determinar a energia cinética do elétron após essa absorção, supondo que o elétron é transferido para uma posição na qual $x > L$.

•18 A Fig. 39-9 mostra os níveis de energia de um elétron confinado em um poço de potencial finito com 450 eV de profundidade. Se o elétron se encontra no estado $n = 3$, qual é a sua energia cinética?

••19 (a) Mostre que para a região $x > L$ do poço de potencial finito da Fig. 39-7, $\psi(x) = De^{2kx}$ é uma solução da equação de Schrödinger unidimensional, onde D é uma constante e k é um número real positivo. (b) Por que razão essa solução matematicamente aceitável não é considerada fisicamente admissível?

••20 A Fig. 39-29a mostra um tubo fino no qual foi montado um poço de potencial finito, com $V_2 = 0$ V. Um elétron se move para a direita no interior do poço, em uma região onde a tensão é $V_1 = -9{,}00$ V, com uma energia cinética de 2,00 eV. Quando o elétron penetra no poço pode ficar confinado se perder energia suficiente emitindo um fóton. Os níveis de energia do elétron no interior do poço são $E_1 = 1{,}0$ eV, $E_2 = 2{,}0$ eV e $E_3 = 4{,}0$ eV, e a região não-quantizada começa em $E_4 = 9{,}0$ eV, como mostra o diagrama de níveis de energia da Fig. 39-29b. Qual é a menor energia (em eV) que o fóton pode possuir?

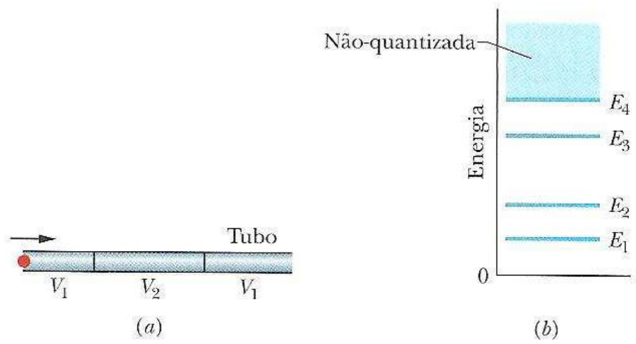

FIG. 39-29 Problema 20.

••21 A Fig. 39-30a mostra o diagrama de níveis de energia de um poço de potencial unidimensional finito que contém um elétron. A região não-quantizada começa em $E_4 = 450{,}0$ eV. A Fig. 39-30b mostra o espectro de absorção do elétron quando se encontra no estado fundamental. O elétron pode absorver fótons com os comprimentos de onda indicados: $\lambda_a = 14{,}588$ nm, $\lambda_b = 4{,}8437$ nm e qualquer comprimento de onda menor que $\lambda_c = 2{,}9108$ nm. Qual é a energia do primeiro estado excitado?

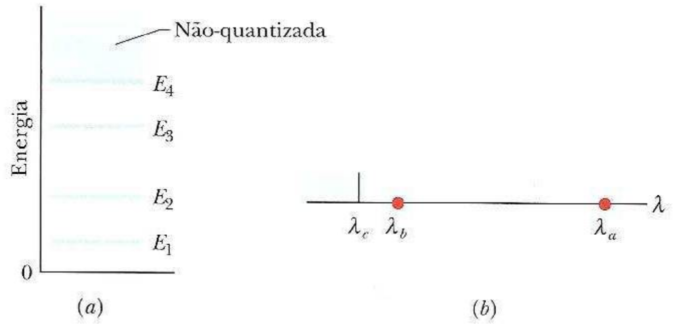

FIG. 39-30 Problema 21.

seção 39-7 Armadilhas Eletrônicas Bidimensionais e Tridimensionais

•22 Um elétron é confinado no curral retangular da Fig. 39-13, cujas larguras são $L_x = 800$ pm e $L_y = 1600$ pm. Qual é a energia do estado fundamental do elétron?

•23 Um elétron é confinado na caixa retangular da Fig. 39-14, cujas dimensões são $L_x = 800$ pm, $L_y = 1600$ pm e $L_z = 390$ pm. Qual é a energia do estado fundamental do elétron?

••24 Um curral retangular de dimensões $L_x = L$ e $L_y = 2L$ contém um elétron. Determine, em múltiplos de $h^2/8mL^2$, onde m é a massa do elétron, (a) a energia do estado fundamental do elétron; (b) a energia do primeiro estado excitado; (c) a energia dos primeiros estados degenerados; (d) a diferença entre as energias do segundo e do terceiro estado excitado.

••25 Um elétron (cuja massa é m) está confinado em um curral retangular de dimensões $L_x = L$ e $L_y = 2L$. (a) Quantas freqüências diferentes o elétron é capaz de emitir ou absorver ao sofrer uma transição entre dois níveis que estão entre os cinco de menor energia? Que múltiplo de $h^2/8mL^2$ corresponde (b) à menor, (c) à segunda menor, (d) à terceira menor, (e) à maior, (f) à segunda maior e (g) à terceira maior freqüência?

••26 Uma caixa cúbica de dimensões $L_x = L_y = L_z = L$ contém um elétron (cuja massa é m). Determine, em múltiplos de $h^2/8mL^2$, (a) a energia do estado fundamental do elétron; (b) a energia do segundo estado excitado; (c) a diferença entre as energias do segundo e terceiro estado excitado. Determine também quantos estados degenerados possuem a energia (d) do primeiro estado excitado; (e) do quinto estado excitado.

••27 Um elétron (cuja massa é m) está confinado em uma caixa cúbica de dimensões $L_x = L_y = L_z$. (a) Quantas freqüências diferentes o elétron é capaz de emitir ou absorver ao sofrer uma transição entre dois níveis que estão entre os cinco de menor energia? Que múltiplo de $h^2/8mL^2$ corresponde (b) à menor, (c) à segunda menor, (d) à terceira menor, (e) à maior, (f) à segunda maior e (g) à terceira maior freqüência?

••28 A Fig. 39-31 mostra um poço de potencial bidimensional infinito situado no plano xy que contém um elétron. Quando um detector é deslocado ao longo da reta $x = L_x/2$ são observados três pontos nos quais a probabilidade de que o elétron seja detectado é máxima. Quando o mesmo detector é deslocado ao longo da reta $y = L_y/2$ são observados cinco pontos nos quais a probabilidade de que o elétron seja detectado é máxima. A distância entre esses pontos é 3,00 nm. Qual é a energia do elétron?

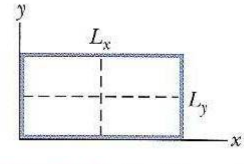

FIG. 39-31 Problema 28.

••29 O curral bidimensional infinito da Fig. 39-32 tem a forma de um quadrado de lado $L = 150$ pm. Uma sonda quadrada, com 5,00 pm de lado e lados paralelos aos eixos x e y, é instalada com o centro no ponto (0,200L; 0,800L). Qual é a probabilidade de que seja detectado um elétron que se acha no estado de energia $E_{1,3}$?

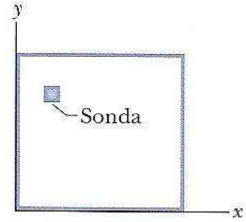

FIG. 39-32 Problema 29.

•••30 Um elétron se encontra no estado fundamental de um poço de potencial bidimensional infinito na forma de um quadrado de lado L. Uma sonda quadrada, com uma área de 400 pm^2, é instalada com o centro no ponto $x = L/8$, $y = L/8$. A probabilidade de que o elétron seja detectado é 0,0450. Qual é o valor de L?

seção 39-9 A Equação de Schrödinger e o Átomo de Hidrogênio

•31 Para o átomo de hidrogênio no estado fundamental, calcule (a) a densidade de probabilidade $\psi^2(r)$ e (b) a densidade de probabilidade radial $P(r)$ para $r = a$, onde a é o raio de Bohr.

•32 Calcule a densidade de probabilidade radial $P(r)$ para o átomo de hidrogênio no estado fundamental (a) em $r = 0$; (b) em $r = a$; (c) em $r = 2a$, onde a é o raio de Bohr.

•33 Um nêutron com uma energia cinética de 6,0 eV colide com um átomo de hidrogênio estacionário no estado fundamental. Explique por que a colisão deve ser elástica, isto é, por que a energia cinética deve ser conservada. (*Sugestão:* Mostre que o átomo de hidrogênio não pode ser excitado pela colisão.)

•34 (a) Qual é a energia E do elétron do átomo de hidrogênio cuja densidade de probabilidade é representada pelo gráfico de pontos da Fig. 39-22? (b) Qual é a menor energia necessária para remover esse elétron do átomo?

•35 Quais são (a) a energia, (b) o módulo do momento e (c) o comprimento de onda do fóton emitido quando um átomo de hidrogênio sofre uma transição de um estado com $n = 3$ para um estado com $n = 1$?

•36 Um átomo (que não é um átomo de hidrogênio) absorve um fóton com uma freqüência de $6{,}2 \times 10^{14}$ Hz. Qual é o aumento de energia do átomo?

•37 Qual é a razão entre o menor comprimento de onda da série de Balmer e o menor comprimento de onda da série de Lyman?

•38 Um átomo (que não é um átomo de hidrogênio) absorve um fóton com um comprimento de onda de 375 nm e emite um fóton com um comprimento de onda de 580 nm. Qual é a energia absorvida pelo átomo no processo?

••39 Qual é o trabalho necessário para separar o elétron e o próton de um átomo de hidrogênio se o átomo se encontra inicialmente (a) no estado fundamental; (b) no estado $n = 2$?

••40 Um átomo de hidrogênio é excitado do estado fundamental para o estado com $n = 4$. (a) Qual é a energia absorvida pelo átomo? Considere as energias dos fótons que podem ser emitidos pelo átomo ao decair para o estado fundamental de várias formas possíveis. (b) Quantas energias diferentes são possíveis? Dessas energias, determine (c) a maior; (d) a segunda maior; (e) a terceira maior; (f) a menor; (g) a segunda menor; (h) a terceira menor.

••41 Qual é a probabilidade de que, no estado fundamental do átomo de hidrogênio, o elétron seja encontrado a uma distância do núcleo maior que o raio de Bohr? (*Sugestão:* Veja o Exemplo 39-8.)

••42 Um fóton com um comprimento de onda de 121,6 nm é emitido por um átomo de hidrogênio. Determine (a) o maior número quântico e (b) o menor número quântico da transição responsável por essa emissão. (c) A que série pertence a transição?

••43 A equação de Schrödinger para os estados do átomo de hidrogênio nos quais o número quântico orbital ℓ é zero é

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - U(r)]\psi = 0.$$

Verifique que a Eq. 39-39, que descreve o estado fundamental do átomo de hidrogênio, é uma solução dessa equação.

••44 Determine (a) o intervalo de comprimentos de onda e (b) o intervalo de freqüências da série de Lyman. Determine (c) o intervalo de comprimentos de onda e (d) o intervalo de freqüências da série de Balmer.

••45 No estado fundamental do átomo de hidrogênio, o elétron possui uma energia total de −13,6 eV. Quais são (a) a energia cinética; (b) a energia potencial do elétron a uma distância do núcleo igual ao raio de Bohr?

••46 Um átomo de hidrogênio, inicialmente em repouso no estado $n = 4$, sofre uma transição para o estado fundamental, emitindo um fóton no processo. Qual é a velocidade de recuo do átomo de hidrogênio?

••47 Mostre que a Eq. 39-44, que expressa a densidade de probabilidade radial para o estado fundamental do átomo de hidrogênio, é normalizada, ou seja, que

$$\int_0^\infty P(r)\,dr = 1$$

••48 Um átomo de hidrogênio em um estado com uma *energia de ligação* (energia necessária para remover um elétron) de 0,85 eV sofre uma transição para um estado com uma *energia de excitação* (diferença entre a energia do estado e a energia do estado fundamental) de 10,2 eV. (a) Qual é a energia do fóton emitido na transição? Determine (b) o maior número quântico e (c) o menor número quântico da transição responsável pela emissão.

••49 As funções de onda dos três estados cujos gráficos de pontos aparecem na Fig. 39-24, para os quais $n = 2$, $\ell = 1$ e $m_\ell = 0, +1$ e -1, são

$$\psi_{210}(r, \theta) = (1/4\sqrt{2\pi})(a^{-3/2})(r/a)e^{-r/2a}\cos\theta,$$
$$\psi_{21+1}(r, \theta) = (1/8\sqrt{\pi})(a^{-3/2})(r/a)e^{-r/2a}(\operatorname{sen}\theta)e^{+i\phi},$$
$$\psi_{21-1}(r, \theta) = (1/8\sqrt{\pi})(a^{-3/2})(r/a)e^{-r/2a}(\operatorname{sen}\theta)e^{-i\phi},$$

onde os índices de $\psi(r, \theta)$ indicam os valores dos números quânticos n, ℓ e m_ℓ e os ângulos θ e ϕ são definidos na Fig. 39-23. Observe que a primeira função de onda é real, mas as outras, que envolvem o número imaginário i, são complexas. Determine a densidade de probabilidade radial $P(r)$ (a) para ψ_{210} e (b) para ψ_{21+1} e ψ_{21-1} (que são iguais). (c) Mostre que os valores de $P(r)$ estão de acordo com os gráficos de pontos da Fig. 39-24. (d) Some as densidades de probabilidade radial ψ_{210}, ψ_{21+1} e ψ_{21-1} e mostre que o resultado depende apenas de r, ou seja, que a densidade de probabilidade radial total tem simetria esférica.

••50 Calcule a probabilidade de que o elétron de um átomo de hidrogênio no estado fundamental seja encontrado na região entre duas cascas esféricas de raios a e $2a$, onde a é o raio de Bohr. (*Sugestão:* Veja o Exemplo 39-8.)

••51 Qual é a probabilidade de que um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio seja encontrado na região entre duas cascas esféricas de raios r e $r + \Delta r$ (a) se $r = 0{,}500a$ e $\Delta r = 0{,}010a$; (b) se $r = 1{,}00a$ e $\Delta r = 0{,}01a$, onde a é o raio de Bohr? (*Sugestão*: Δr é suficientemente pequeno para que a densidade de probabilidade radial seja considerada constante entre r e $r + \Delta r$.)

••52 Um fóton com um comprimento de onda de 102,6 nm é emitido por um átomo de hidrogênio. Determine (a) o maior número quântico e (b) o menor número quântico da transição responsável por essa emissão. (c) A que série pertence essa transição?

••53 Para que valor do número quântico principal n o raio efetivo que aparece em um gráfico de pontos da densidade de probabilidade radial do átomo de hidrogênio é igual a 1,0 mm? Suponha que o valor de ℓ é o maior possível, $n - 1$. (*Sugestão:* Veja a Fig. 39-25.)

•••54 A função de onda do estado quântico do átomo de hidrogênio cujo gráfico de pontos aparece na Fig. 39-22, para o qual $n = 2$ e $\ell = m_\ell = 0$, é

$$\psi_{200}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}a^{-3/2}\left(2 - \frac{r}{a}\right)e^{-r/2a},$$

onde a é o raio de Bohr e o índice de $\psi(r)$ corresponde aos valores dos números quânticos n, ℓ e m_ℓ. (a) Plote $\psi^2_{200}(r)$ em função de r e mostre que o gráfico é compatível com o gráfico de pontos da Fig. 39-22. (b) Mostre analiticamente que $\psi^2_{200}(r)$ passa por um máximo em $r = 4a$. (c) Determine a densidade de probabilidade radial $P_{200}(r)$ para esse estado. (d) Mostre que

$$\int_0^\infty P_{200}(r)\,dr = 1$$

e que, portanto, a expressão aqui apresentada para a função de onda $\psi^2_{200}(r)$ está normalizada corretamente.

•••55 No Exemplo 39-7 mostramos que a densidade de probabilidade radial para o estado fundamental do átomo de hidrogênio é máxima para $r = a$, onde a é o raio de Bohr. Mostre que o valor *médio* de r, definido como

$$r_{\text{méd}} = \int P(r)\,r\,dr,$$

é igual a $1{,}5a$. Nessa expressão para $r_{\text{méd}}$ cada valor de $P(r)$ recebe um peso igual ao valor correspondente de r. Observe que o valor médio de r é maior que o valor de r para o qual $P(r)$ é máxima.

Problemas Adicionais

56 Um elétron é confinado em um tubo estreito evacuado com 3,0 m de comprimento; o tubo se comporta como um poço de potencial infinito unidimensional. (a) Qual é a diferença de energia entre o estado fundamental do elétron e o primeiro estado excitado? (b) Para que número quântico n a diferença entre níveis de energia vizinhos é da ordem de 1,0 eV (um valor suficientemente

grande para ser medido)? Para esse número quântico, (c) calcule a energia total do elétron em termos da energia de repouso e (d) determine se a velocidade do elétron é relativística.

57 Como sugere a Fig. 39-8, a densidade de probabilidade na região $x > L$ do poço de potencial finito da Fig. 39-7 diminui exponencialmente de acordo com a equação $\psi^2(x) = Ce^{-2kx}$, onde C é uma constante. (a) Mostre que a função de onda $\psi(x)$ que pode ser calculada a partir desta equação é uma solução da equação de Schrödinger unidimensional. (b) Qual deve ser o valor de k para que a afirmação do item (a) seja verdadeira?

58 Como sugere a Fig. 39-8, a densidade de probabilidade na região $0 < x < L$ do poço de potencial finito da Fig. 39-7 varia senoidalmente, de acordo com a equação $\psi^2(x) = B \operatorname{sen}^2 kx$, onde B é uma constante. (a) Mostre que a função de onda $\psi(x)$ que pode ser calculada a partir dessa equação é uma solução da equação de Schrödinger unidimensional. (b) Qual deve ser o valor de k para que a afirmação do item (a) seja verdadeira?

59 (a) Para um dado valor do número quântico principal n, quantos valores do número quântico orbital ℓ são possíveis? (b) Para um dado valor de ℓ, quantos valores do número quântico magnético orbital m_ℓ são possíveis? (c) Para um dado valor de n, quantos valores de m_ℓ são possíveis?

60 Seja ΔE a diferença de energia entre dois níveis vizinhos de um elétron confinado em um poço de potencial infinito unidimensional. Seja E a energia de um dos níveis. (a) Mostre que a razão $\Delta E/E$ tende para o valor $2/n$ para grandes valores do número quântico n. Quando $n \to \infty$, (b) ΔE tende para zero? (c) E tende para zero? (d) $\Delta E/E$ tende para zero? (e) O que significam esses resultados em termos do princípio de correspondência?

61 Um elétron está confinado em um poço de potencial infinito unidimensional. Mostre que a diferença ΔE entre as energias dos níveis quânticos n e $n + 2$ é $(h^2/2mL^2)(n + 1)$.

62 Verifique que o valor da constante da Eq. 39-32 é 13,6 eV.

63 (a) Mostre que os termos da equação de Schrödinger (Eq. 39-18) têm a mesma dimensão. (b) Qual é a unidade desses termos no SI?

64 Repita o Exemplo 39-6 para a série de Balmer do átomo de hidrogênio.