Prova #1 GFI00220
ELETROMAGNETISMO

12 de Setembro de 2019

Nome do aluno:

(1) (3 pontos)A região $r \leq R$, em coordenadas esféricas, tem uma intensidade de campo vetorial:

$$\bar{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} a_r, \tag{1}$$

onde ρ (densidade volumétrica de carga) é uma constante. Determine ambos os lados da expressão o teorema da divergência para este campo.

(2) (2 pontos) (a) Determine a capacitância de um cabo coaxial de comprimento L (muito comprido). Considere que o cabo coaxial é composto por dois cilindros metálicos ocos concêntricos de raios ρ_1 e ρ_2, com $\rho_2 > \rho_1$.

(b) Se a diferença de potencial entre os cilindros é V, qual a energia armazenada no capacitor?

(3)(2 pontos) Uma carga Q é uniformemente distribuida sobre um espira circular de raio R..

(a) Encontre o potencial en um ponto pertencente ao eixo da espira, a uma altura z do plano da espira.

(b) A partir deste potencial determine o campo elétrico no ponto z.

(4) (3 pontos) Dado o campo elétrico $\bar{E} = (3x^2 + y)a_x + xa_y$ kV/m.
(a) Mostre que este campo é irrotacional.
(b) Determine o potencial escalar (V) de $\bar{E}$. De modo que $\bar{E} = -\nabla V$.
(c) Determine o trabalho realizado ao movimentar uma carga $Q = -2 \times 10^{-6}$ C neste campo, do ponto (0,5,0)m ao ponto (2,-1,0)m.

GABARITO P1

(1) $$\bar{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{a}_r$$

Para $r = R$ $$\bar{E} = \frac{\rho R}{3\varepsilon}\hat{a}_r$$

$$\oint \bar{E} \cdot dS = \oint \frac{\rho R}{3\varepsilon}\bar{dS} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}\int \bar{dS} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} 4\pi R^2$$

$$\boxed{\oint \bar{E} \cdot \bar{ds} = \frac{4\pi \rho R^3}{3\varepsilon_0}}$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cancel{E} r\right)$$

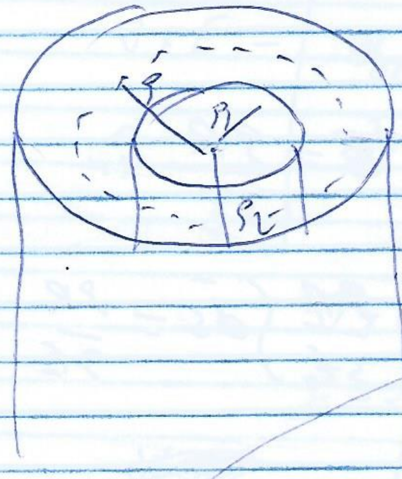
$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{\cancel{r^2}}\frac{\rho}{\cancel{3}\varepsilon_0}\cancel{3}\cancel{r^2}$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\int (\nabla \cdot \bar{E})\, dv = \int_0^R \frac{\rho}{\varepsilon} 4\pi r^2 dr$$

$$\boxed{\int (\nabla \cdot \bar{E})\, dv = \frac{4\pi \rho R^3}{3\varepsilon_0}}$$

(2)



campo ~~entre~~ em

$\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$

$$E\, 2\pi \rho L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{E} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L \rho}\, \hat{a}_\rho$$

$$V = -\int \bar{E} \cdot d\bar{\rho} = -\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon L \rho}\, d\rho$$

$$V = -\frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$|Q| = \left[\frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}\right] V$$

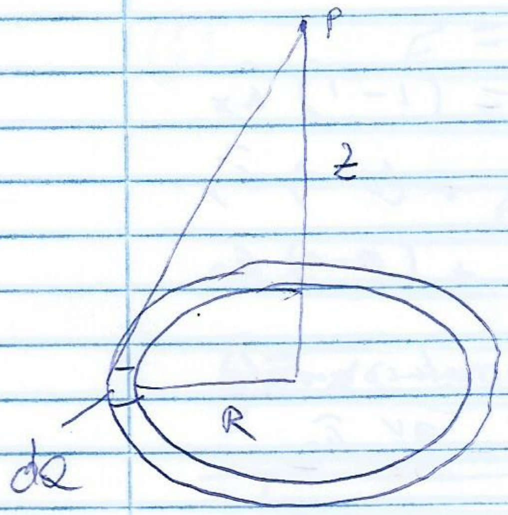
$$\boxed{C = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}}$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2\, dv$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \left[\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L \rho}\right]^2 (\rho\, d\rho\, d\phi\, L)$$

$$\boxed{u = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

(3)



$$dV_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{dQ}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{2\pi R} \int \frac{dl}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\rho_L = \frac{dQ}{dl} = \frac{Q}{2\pi R}$$

$$\boxed{V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \sqrt{R^2+z^2}}}$$

b) $$V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} (R^2+z^2)^{-1/2}$$

$$E_z = -\frac{\partial V_p}{\partial z}$$

$$E_z = -\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(R^2+z^2\right)^{-3/2} 2z$$

$$\boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q z}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

④ $\bar{E} = (3x^2 + y)\,\hat{a}_x + x\,\hat{a}_y \quad \frac{KV}{m}$

$$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \partial/\partial x & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2+y & x & 0 \end{vmatrix} = (1-1)\,\hat{a}_x + (0-0)\,\hat{a}_y + (0-0)\,\hat{a}_z$$

$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad \bar{E}$ é irrotacional

$$\bar{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$V = -\int E_x\,dx = -\int (3x^2+y)\,dx = -x^3 - yx + c(y)$$

$$V = -\int E_y\,dy = -\int x\,dy = -xy + c(x)$$

$$V = -\int E_z\,dz = \int 0\,dz = c(x,y)$$

$$c(y) = 0 \qquad c(x) = -x^3$$

$$c(x,y) = 0$$

$$\boxed{V = -x^3 - xy}$$

$V(0,5,0) = 0$

$V(2,-1,0) = -8 + 2 = -6 \text{ KV}$

$\Delta V = -6 \text{ KV}$

$W = Q\,\Delta V$

$W = (-2\times10^{-6})C\,(-6)\text{KV} = 12\times10^{-6}\text{ KJ}$

$= 12\times10^{-3}\text{ J}$

$= 1{,}2\times10^{-2}\text{ J}$